Curvas generadas por segmento deslizante

"La creatividad implica romper con patrones establecidos para mirar las cosas de otra forma". Edward de Bono.

Wilfredo Zuleta R.[1]

Este artículo es acerca de lugares geométricos que son generadas por un segmento de recta que se desliza por dos semirrectas con un origen común y que forman un ángulo fijo.

A) Sea el segmento de recta AM, de longitud L, y sobre él se ubica un punto P tal que $\overline{AP} = kL$ donde $0 \leq k \leq 1$. Cuando dicho segmento se mueve entre la posición inclinada y el segmento horizontal, el punto P describe un arco de curva mostrada en la gráfica 1 en rojo.

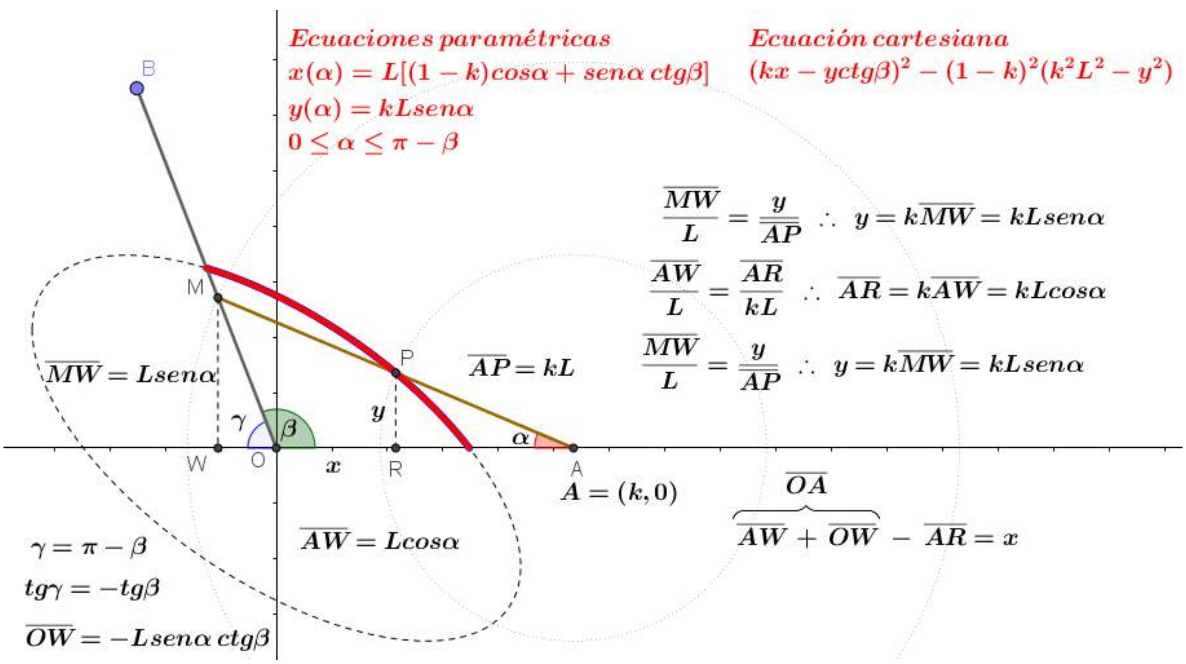

Figura 1

Haciendo uso de la geometría y trigonometría plana básica podemos corroborar la información que aparece en la figura 1 y por ende las ecuaciones paramétricas y cartesiana de tal curva.

Podemos observar que la curva encontrada (en rojo) en un pedazo de la elipse rotada representada por la ecuación cartesiana señalada en la figura anterior en línea negra punteada.

Veamos dos casos particulares de dicha curva:

[1] Profesor jubilado del NURR. Universidad De Los Andes. Trujillo-Venezuela. Email:wrzr2001us@hotmail.com

1) Si $k=\frac{1}{2}$ y $\beta=90^{o}$ obtenemos un cuarto de circunferencia con ecuaciones paramétricas: $x=\frac{L}{2}\cos\alpha; y=\frac{L}{2}sen\alpha$, esto es, una circunferencia con centro en el punto O y radio $\frac{L}{2}$. Ver figura 2

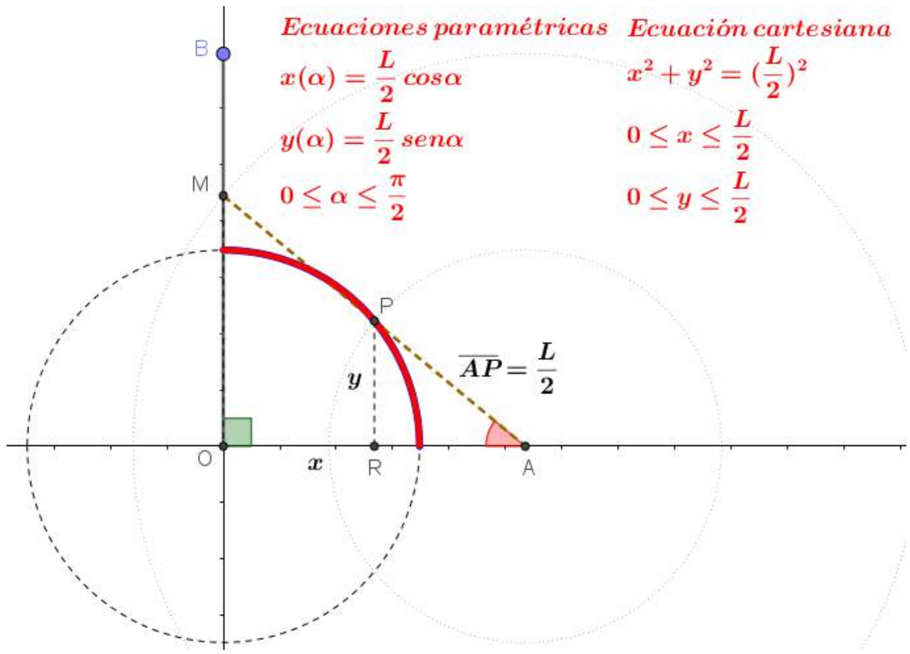

Figura 2

2) Si $k=\frac{1}{3}$ y $\beta=90^{o}$ obtenemos un cuarto de elipse con ecuaciones paramétricas: $x=\frac{2L}{3}\cos\alpha; y=\frac{L}{3}sen\alpha$, esto es, un cuarto de elipse con centro en el punto O con longitud de semieje mayor $\frac{2L}{3}$ y longitud de semieje menor $\frac{L}{3}$. Ver figura 3

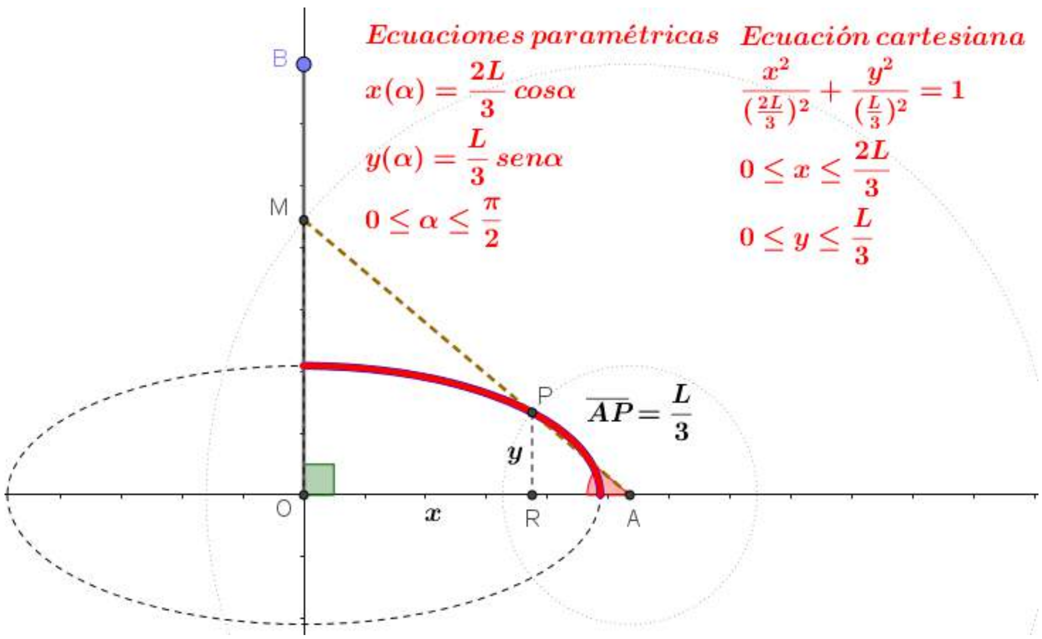

Figura 3

B) En este caso el punto P (el que describe la curva esperada) es el punto de corte del segmento deslizante AM con la recta perpendicular a éste y que pasa por el punto O (origen). Ver figura 4

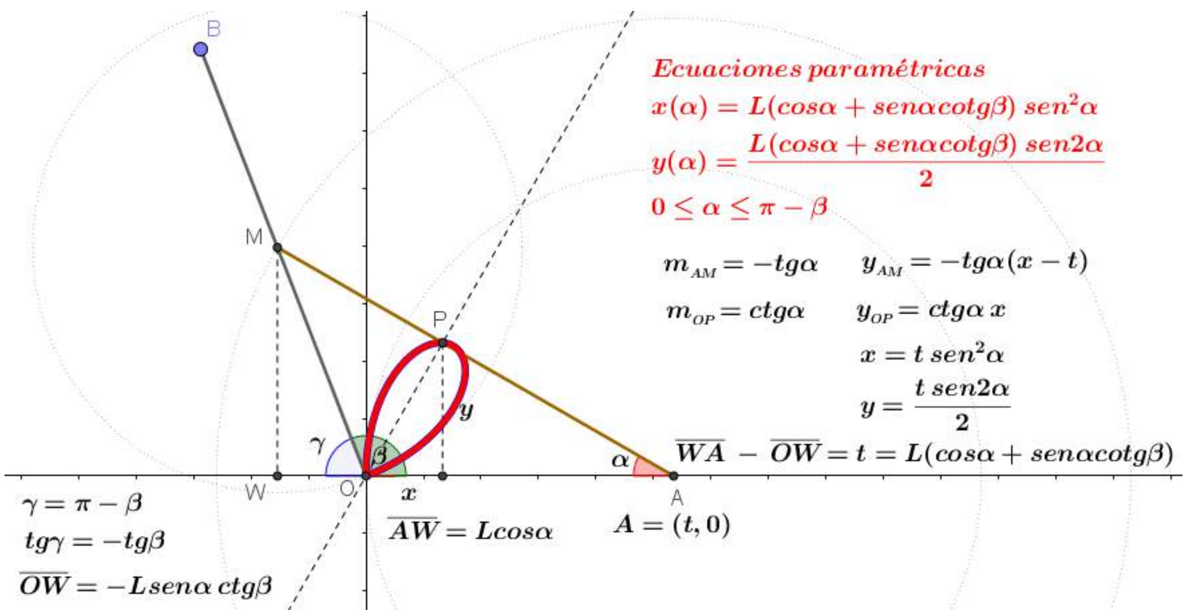

Figura 4

C) Ahora consideremos que el punto P es el punto de intersección de las rectas que son perpendiculares a los ejes coordenados y que pasan por los extremos del segmento deslizante AM

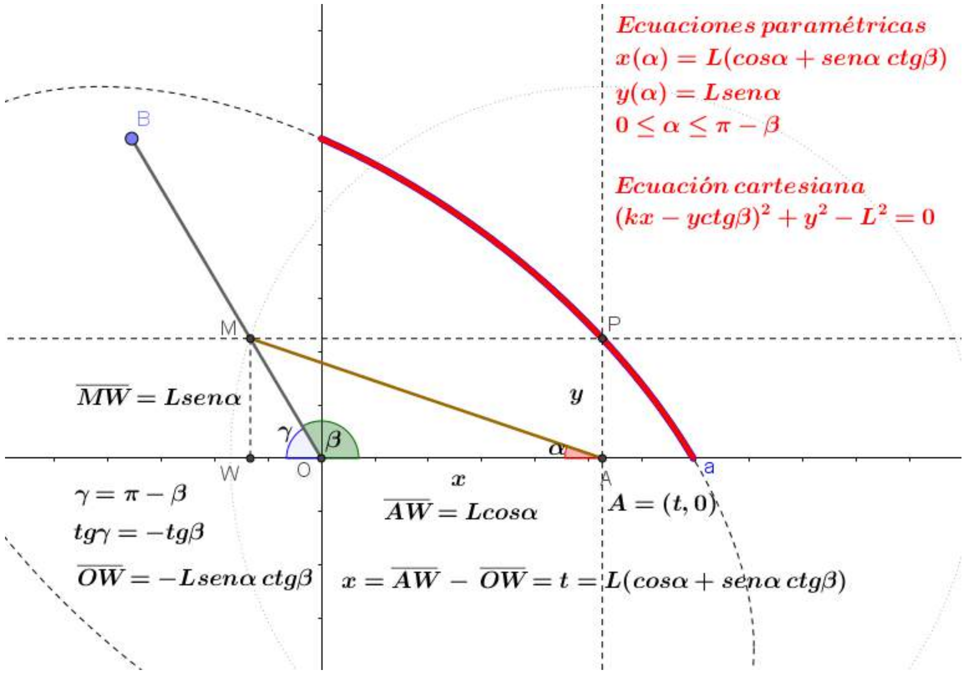

Figura 5

El arco de curva (rojo) es la parte de la elipse rotada $\left(\frac{k}{L}x - \frac{y}{L}\operatorname{cotg}\beta\right)^2 + \frac{y^2}{L^2} = 1$ (curva punteada) que está en el primer cuadrante, o sea, para los valores $0 \leq x \leq \frac{L}{t}$ y $0 \leq y \leq L\sec\beta$.

D) En el caso anterior hacemos que pase una perpendicular al segmento AM y que pase por el punto P, de manera que esta recta corta al segmento AM en el punto Q, el cual traza el lugar geométrico mencionado en la medida que el segmento AM se deslice como anteriormente se ha indicado. Ver figura 6.

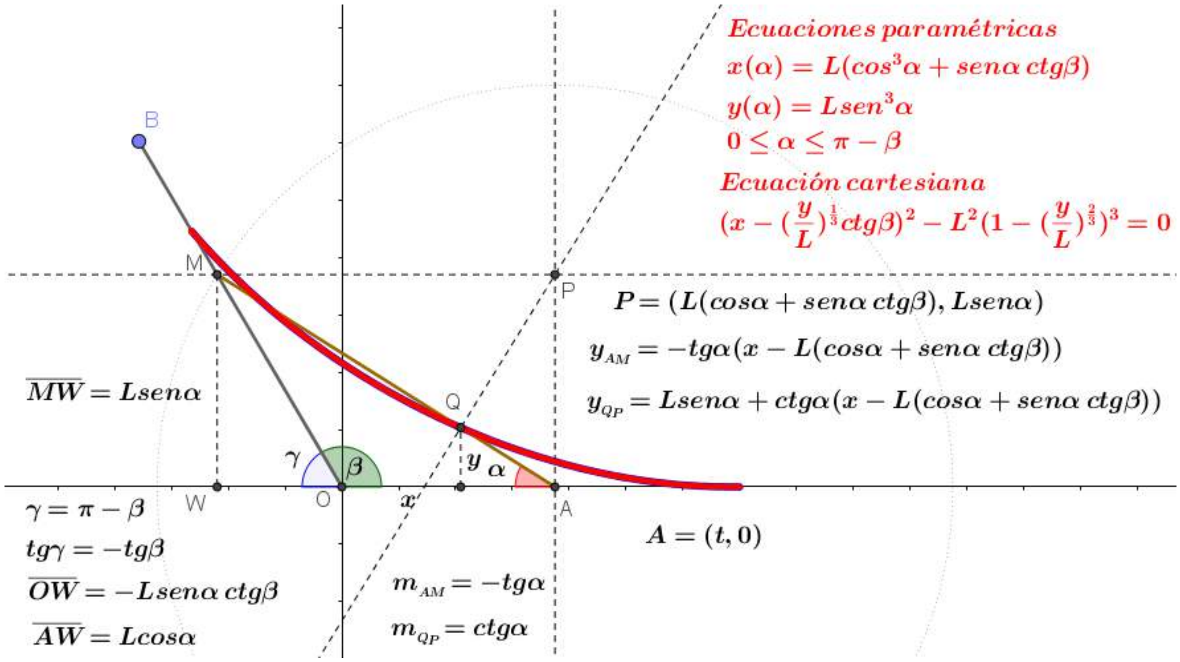

Figura 6

E) Si en el caso anterior la recta perpendicular al eje y que pasa por el punto M la hacemos perpendicular al segmento OB y encontramos el punto intersección entre ésta y la recta $x = t$, punto Q y luego por este punto trazamos una recta perpendicular al segmento AM, entonces este punto P donde se cortan estas rectas describe la curva mostrada en la figura 7 cuando el segmento AM se desliza como se ha indicado anteriormente.

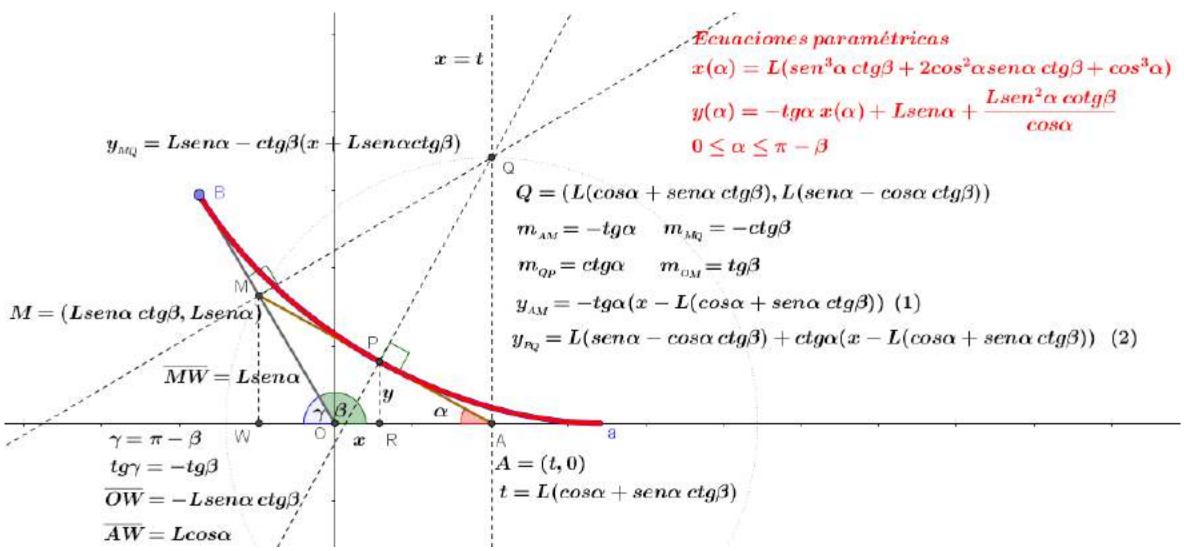

Figura 7

Con la información señalada en la figura anterior se pueden obtener las ecuaciones paramétricas de dicha curva.

F) Teniendo el mismo segmento AM de longitud L que se desliza como ya lo indicamos, donde el punto t es un parámetro tal que $0 \leq t \leq L$ y este valor de t determina el movimiento de dicho segmento al variar en este rango indicado. El punto P sobre AM se ha escogido de tal manera que la distancia $\overline{AP}$ sea siempre igual a la distancia $\overline{OM}$. De manera que cuando t varía, el punto P traza la curva que está en rojo en la figura 8.

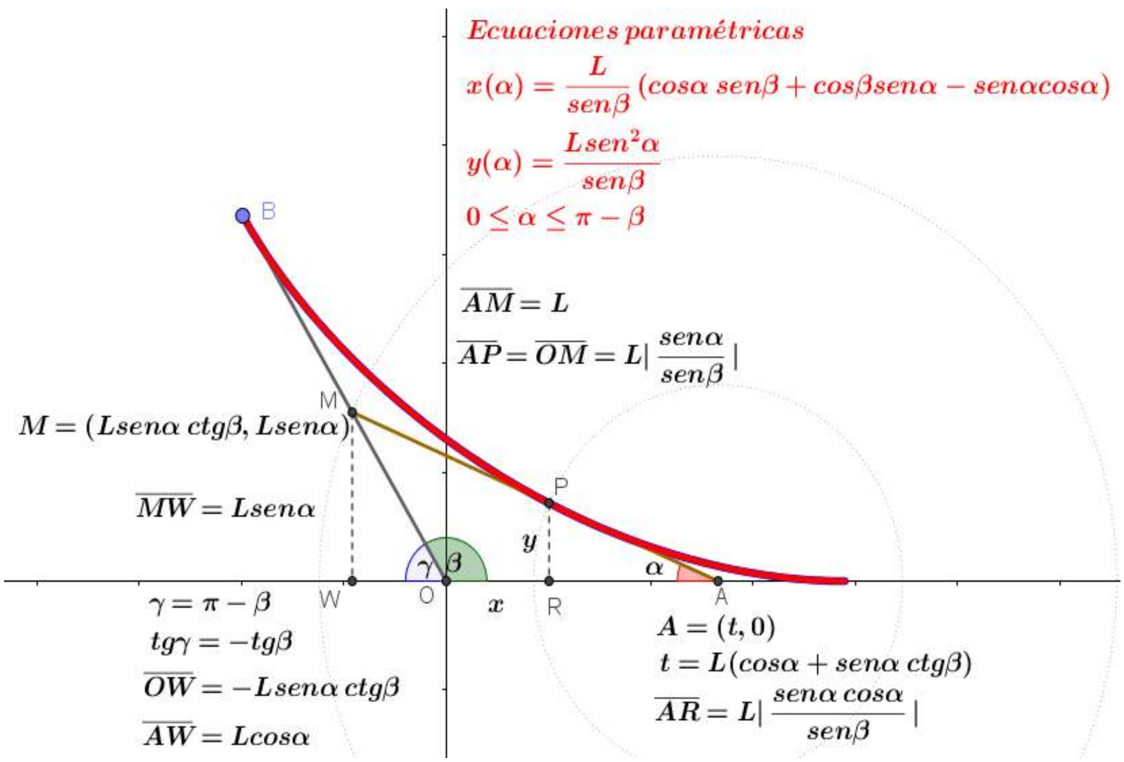

Figura 8

G) Si ahora se escoge el punto P sobre AM pero tal que la distancia $\overline{MP}$ sea igual a $\overline{AM}$ encontramos otra curva muy distinta a la encontrada en el caso (F) y que se muestra en la figura 9 en donde aparece la información suficiente para encontrar las ecuaciones paramétricas que allí se señalan. Ver figura 9.

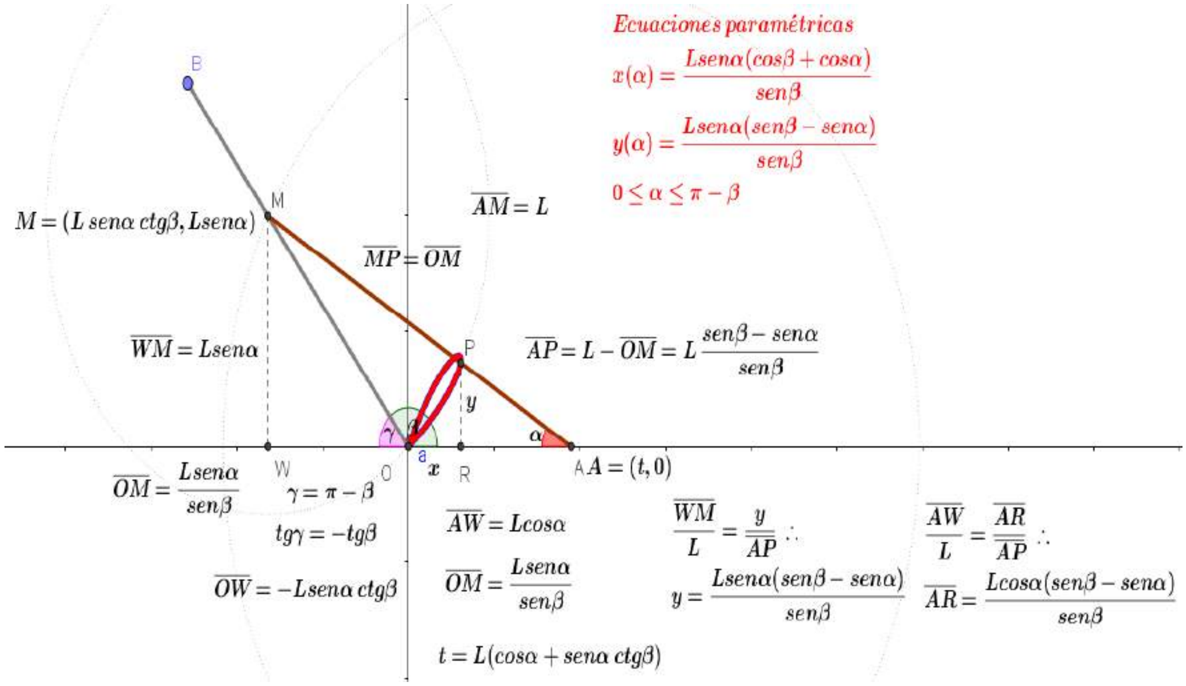
Ecuaciones paramétricas
$x(\alpha) = \frac{Lsen\alpha(cos\beta + cos\alpha)}{sen\beta}$
$y(\alpha) = \frac{Lsen\alpha(sen\beta - sen\alpha)}{sen\beta}$
$0 \leq \alpha \leq \pi - \beta$
B
M
$M = (L\, sen\alpha\, ctg\beta, Lsen\alpha)$
$\overline{AM} = L$
$\overline{MP} = \overline{OM}$
$\overline{WM} = Lsen\alpha$
P
$\overline{AP} = L - \overline{OM} = L\frac{sen\beta - sen\alpha}{sen\beta}$
y
γ
β
α
a
W
O
x
R
A
$A = (t, 0)$
$\overline{OM} = \frac{Lsen\alpha}{sen\beta}$
$\gamma = \pi - \beta$
$tg\gamma = -tg\beta$
$\overline{OW} = -Lsen\alpha\, ctg\beta$
$\overline{AW} = Lcos\alpha$
$\overline{OM} = \frac{Lsen\alpha}{sen\beta}$
$t = L(cos\alpha + sen\alpha\, ctg\beta)$
$\frac{\overline{WM}}{L} = \frac{y}{\overline{AP}} \therefore$
$y = \frac{Lsen\alpha(sen\beta - sen\alpha)}{sen\beta}$
$\frac{\overline{AW}}{L} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AP}} \therefore$
$\overline{AR} = \frac{Lcos\alpha(sen\beta - sen\alpha)}{sen\beta}$

Figura 9