La Integral Curvilínea

UNA INTRODUCCIÓN BÁSICA

Carmen SÁNCHEZ DÍEZ

01. Una introducción

La integral de Riemann unidimensional requiere una función definida y continua sobre el intervalo [a,b] de integración:

$$\int_a^b f(x).dx$$

Considerando R^n, podemos extender el concepto de integración sustituyendo el intervalo unididimensional por una curva $\gamma[\vec{\phi}]$ descrita mediante una función vectorial $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$. Si el integrando es la función $\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$, definida y acotada sobre dicha curva, la integral curvilínea se puede expresar por

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi}$$

donde $\vec{f}.d\vec{\phi}$ es el producto interior de ambas funciones vectoriales. Pueden ser consideradas estas integrales, por consiguiente, integrales de Riemann-Stieltjes, en las que el integrando y el integrador son funciones vectoriales.

02. Definición de integral curvilínea

- Sea γ una curva de R^n descrita por la función vectorial $\vec{\phi} = (\phi_1, ..., \phi_n)$ definida en [a,b].
- Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ una partición de [a,b] $(P \in \mathrm{P}[a,b])$ y sea $r_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, ..., m$
- Sea $\vec{f} = (f_1, ..., f_n)$ una función vectorial definida sobre γ
- Sea finalmente la expresión suma de productos interiores

$$S(P, \vec{f}, \vec{\phi}) = \sum_{k=1}^{m} \vec{f}(\vec{\phi}(r_k)).\left[\vec{\phi}(t_k) - \vec{\phi}(t_{k-1})\right] \qquad (1)$$

En estas condiciones, decimos que existe la integral curvilínea de $\vec{f}$ respecto de $\vec{\phi}$, o bien, la integral de línea de $\vec{f}$ respecto de $\vec{\phi}$, a lo largo de la trayectoria $\gamma[\vec{\phi}]$ si existe un número real I con la siguiente propiedad:

$$\left.\begin{array}{c}\forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \in \mathrm{P}[a,b] / \forall P \supset P_\varepsilon \\ \forall r_k \in [t_{k-1}, t_k], k = 1,\ldots,n\end{array}\right\} \Rightarrow \left| I - S(P,\vec{f},\vec{\phi}) \right| < \varepsilon$$

Cuando tal número real existe, es único, y se puede representar por

$$I = \int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi}$$

03. Teorema de la expresión escalar

Si son γ, *P*, $\vec{\phi}$ y $\vec{f}$ los indicados antes en la definición de integral curvilínea, se tiene que

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b f_j[\vec{\phi}(t)] d\phi_j(t)$$

siempre que existan las integrales Riemann-Stieltjes del segundo miembro.

Demostración:

Desarrollando los productos internos de la expresión (1) escribimos:

$$S(P,\vec{f},\vec{\phi}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f_j(\vec{\phi}(r_k)).[\phi_j(t_k) - \phi_j(t_{k-1})]$$

y para cada índice *j* es:

$$S_j(P,\vec{f},\vec{\phi}) = \sum_{k=1}^{m} f_j(\vec{\phi}(r_k)).[\phi_j(t_k) - \phi_j(t_{k-1})]$$

con $I_j = \int_a^b f_j[\vec{\phi}(t)] d\phi_j(t)$

Como consecuencia, podemos expresar la integral curvilínea como la suma

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} = \int_a^b f_1.d\phi_1 + \ldots + f_n.d\phi_n$$

04. **Propiedad de linealidad**

Si son γ, P, $\vec{\phi}$ los indicados antes en la definición de integral curvilínea, y son $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ funciones vectoriales definidas y acotadas en γ, se cumple que si existen las integrales

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}_1.d\vec{\phi} \quad \text{y} \quad \int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}_2.d\vec{\phi}$$

también existe la integral

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]} \left(c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2\right)d\vec{\phi}, \quad c_1, c_2 \in R$$

y además se verifica la igualdad:

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]} \left(c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2\right)d\vec{\phi} = c_1 \int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}_1.d\vec{\phi} + c_2 \int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}_2.d\vec{\phi}, \quad c_1, c_2 \in R$$

Demostración:

Si hacemos $\vec{g} = c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2$, podemos escribir:

$$S(P,\vec{g},\vec{\phi}) = \sum_{k=1}^{m} \vec{g}(\vec{\phi}(r_k)).\left[\vec{\phi}(t_k) - \vec{\phi}(t_{k-1})\right] = c_1 \sum_{k=1}^{m} \vec{f}_1(\vec{\phi}(r_k)).\left[\vec{\phi}(t_k) - \vec{\phi}(t_{k-1})\right] +$$

$$+ c_2 \sum_{k=1}^{m} \vec{f}_2(\vec{\phi}(r_k)).\left[\vec{\phi}(t_k) - \vec{\phi}(t_{k-1})\right] = S(P,\vec{f}_1,\vec{\phi}) + S(P,\vec{f}_2,\vec{\phi})$$

$\forall \varepsilon > 0,$ elijamos particiones $p'_\varepsilon \subset P,\ p''_\varepsilon \subset P$ tales que

$$\left| S(P,\vec{f}_1,\vec{\phi}) - \int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}_1.d\vec{\phi} \right| < \frac{\varepsilon}{2|c_1|}, \qquad \left| S(P,\vec{f}_2,\vec{\phi}) - \int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}_2.d\vec{\phi} \right| < \frac{\varepsilon}{2|c_2|}$$

Tomando la partición $p_\varepsilon = p'_\varepsilon \cup p''_\varepsilon$, se tiene que para una partición P mas fina que p_ε será:

$$\left| S(P,\vec{f}_1,\vec{\phi}) - c_1 \int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}_1.d\vec{\phi}' - c_2 \int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}_2.d\vec{\phi} \right| < c_1 \frac{\varepsilon}{2|c_1|} + c_2 \frac{\varepsilon}{2|c_2|} = \varepsilon$$

de lo cual

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]} \left(c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2\right)d\vec{\phi} = c_1 \int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}_1.d\vec{\phi} + c_2 \int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}_2.d\vec{\phi}, \quad c_1, c_2 \in R$$

05. **Propiedad de aditividad**

Si es $\gamma(\vec{\phi})=\gamma_1(\vec{\phi})+\gamma_2(\vec{\phi})$ la curva descrita por la función vectorial $\vec{\phi}$, se tiene que, si existen dos de las integrales siguientes, también existirá la tercera integral, cumpliéndose que

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} = \int_{\gamma_1[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} + \int_{\gamma_2[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi}$$

Demostración:

Consideremos un punto c del interior del intervalo sobre el cual está definida la función vectorial $\vec{\phi}$, de modo que

$$c \in (a,b) / \begin{matrix} \vec{\phi}[a,c] = \gamma_1 \\ \vec{\phi}[c,b] = \gamma_2 \end{matrix}$$

Sea también la partición $P \in P[a,b]$, y sean $P' = P \cap [a,c]$, $P'' = P \cap [c,b]$. Se verifica obviamente que

$$S(P,\vec{f},\vec{\phi}) = S(P',\vec{f},\vec{\phi}) + S(P'',\vec{f},\vec{\phi})$$

Por otra parte, si existen las integrales

$$\int_{\gamma_1[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi}, \quad \int_{\gamma_2[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi}$$

entonces, para un $\varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon^{'} \in P[a,c] \wedge \exists P_\varepsilon^{''} \in P[c,b]$ tales que, para cualesquiera particiones más finas $P' \supset P_\varepsilon^{'}$, $P'' \supset P_\varepsilon^{''}$, se verifica:

$$\left| S(P',\vec{f},\vec{\phi}) - \int_{\gamma_1[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| S(P'',\vec{f},\vec{\phi}) - \int_{\gamma_2[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando ahora la partición de todo el intervalo, unión de las particiones consideradas antes:

$P_\varepsilon = P_\varepsilon^{'} \cup P_\varepsilon^{''}$, se tiene que para toda partición P más fina, $P_\varepsilon \subset P$, se cumple que $P' \supset P_\varepsilon^{'}$, $P'' \supset P_\varepsilon^{''}$. De lo cual:

$$\left| S(P',\vec{f},\vec{\phi}) + S(P'',\vec{f},\vec{\phi}) - \int_{\gamma_1[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi}' - c_2 \int_{\gamma_2[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

o bien:

$$\left| S(P,\vec{f},\vec{\phi}) - \int_{\gamma_1[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi}' - c_2 \int_{\gamma_2[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} \right| < \varepsilon$$

por lo que

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} = \int_{\gamma_1[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} + \int_{\gamma_2[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi}$$

06. Equivalencia. Propiedad de equivalencia

Dos funciones vectoriales continuas, $\vec{\phi}$ y $\vec{\varphi}$, definidas respectivamente en los intervalos reales $[a,b]$ y $[c,d]$, se dicen *propiamente equivalentes* sii existe una función continua *h*, estrictamente creciente:

$$h:[c,d]\to[a,b]$$

con $h(c)=a$ y $h(d)=b$, tal que

$$\forall t\in[c,d],\ \vec{\varphi}(t)=\vec{\phi}[h(t)]$$

Obviamente, h es uno a uno en $[c,d]$, existiendo, por consiguiente, la función inversa $h^{-1}:[a,b]\to[c,d]$, que es también uno a uno.

Si la función $h:[c,d]\to[a,b]$ fuera estrictamente decreciente, ambas funciones vectoriales continuas, $\vec{\phi}$ y $\vec{\varphi}$, se dicen *impropiamente equivalentes*.

Se verifica la siguiente propiedad de equivalencia:

Sean $\vec{\phi}$ y $\vec{\varphi}$ dos funciones vectoriales equivalentes definidas respectivamente en los intervalos reales $[a,b]$ y $[c,d]$ que describen la misma curva γ. Se cumple que si existe la integral

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]}\vec{f}.d\vec{\phi}$$

también existe la integral

$$\int_{\gamma[\vec{\varphi}]}\vec{f}.d\vec{\varphi}$$

y, además:

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]}\vec{f}.d\vec{\phi}=\pm\int_{\gamma[\vec{\varphi}]}\vec{f}.d\vec{\varphi}$$

(si, respectivamente, es $\gamma[\vec{\phi}]=\pm\gamma[\vec{\varphi}]$)

Demostración:

Si es *h* la función continua de la equivalencia ($\forall t\in[c,d],\ \vec{\varphi}(t)=\vec{\phi}[h(t)]$), se tiene que a toda partición $P\in P[a,b]/P=\{y_0,y_1,...,y_n\}$ le corresponde la partición $P'\in P[a,b]/P'=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ tal que $x_r=h(y_r),\ r=0,1,...,n$.
Como existe la integral $\int_{\gamma[\vec{\phi}]}\vec{f}.d\vec{\phi}$, se cumplirá:

$$\forall\varepsilon>0,\exists P_\varepsilon'\in P[a,b]/si\ \ P'\supset P_\varepsilon'\Rightarrow\left|S(P',\vec{f},\vec{\phi})-\int_{\gamma[\vec{\phi}]}\vec{f}.d\vec{\phi}\right|<\varepsilon$$

Como *h* es uno a uno, $\exists h^{-1}:[a,b]\to[c,d]$

Sea $P_\varepsilon \in P[c,d] / P_\varepsilon = h^{-1}(P'_\varepsilon)$, y sea $P \in P[c,d] / P \supset P_\varepsilon$. Consideremos:

$S(P,\vec{f},\vec{\varphi}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{f}[\vec{\varphi}(u_k)].[\vec{\varphi}(y_k)-\vec{\varphi}(y_{k-1})]$, siendo $u_k \in [y_{k-1},y_k]$

O bien, por ser equivalentes las funciones $\vec{\phi}$ y $\vec{\varphi}$:

$$S(P,\vec{f},\vec{\varphi}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{f}\left[\vec{\phi}(h(u_k))\right].\left[\vec{\phi}(h(y_k))-\vec{\phi}(h(y_{k-1}))\right] = \sum_{k=1}^{n} \vec{f}\left[\vec{\phi}(v_k)\right].\left[\vec{\phi}(x_k)-\vec{\phi}(x_{k-1})\right] =$$
$$= S(P',\vec{f},\vec{\phi})$$

de lo cual

$$\left| S(P,\vec{f},\vec{\varphi}) - \int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} \right| < \varepsilon$$

resultando, pues, que

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} = \int_{\gamma[\vec{\varphi}]} \vec{f}.d\vec{\varphi}$$

Si *h* fuera estrictamente decreciente ($\vec{\phi}$ y $\vec{\varphi}$ impropiamente equivalentes) se obtiene de forma análoga:

$$\int_{\gamma[\vec{\phi}]} \vec{f}.d\vec{\phi} = -\int_{\gamma[\vec{\varphi}]} \vec{f}.d\vec{\varphi}$$

07. Propiedad de acotación en curvas rectificables

Sea γ una curva rectificable de longitud $L(\gamma)$ descrita por la función vectorial continua $\vec{\phi}$ definida sobre el intervalo $[a,b]$.
Si $\vec{f}$ está definida y acotada sobre γ, esto es, si

$$\exists M \in R / \left|\vec{f}(\vec{x})\right| \le M, \forall \vec{x} \in \gamma$$

se verifica que caso de existir la integral

$$\int_{\gamma(\vec{\phi})} \vec{f}.d\vec{\phi}$$

entonces

$$\left|\int_{\gamma(\vec{\phi})} \vec{f}.d\vec{\phi}\right| \le M.L(\gamma)$$

Demostración:

$$\left|S(P,\vec{f},\vec{\phi})\right| = \left|\sum_{k=1}^{m}\left[\vec{f}\left(\vec{\phi}(s_k)\right)\right]\left[\vec{\phi}(t_k)-\vec{\phi}(t_{k-1})\right]\right| \leq \sum_{k=1}^{m}\left|\vec{f}\left(\vec{\phi}(s_k)\right)\right|.\left|\vec{\phi}(t_k)-\vec{\phi}(t_{k-1})\right| \leq$$

$$\leq M.\sum_{k=1}^{m}\left|\vec{\phi}(t_k)-\vec{\phi}(t_{k-1})\right| \leq M.L(\gamma)$$

por tanto:

$$\left|\int_{\gamma(\vec{\phi})}\vec{f}.d\vec{\phi}\right| \leq M.L(\gamma)$$

08. **Integral curvilínea de un gradiente**

$\forall S \subset R^n$ abierto, sea $\phi : S \to R / \phi \in C^1$ en S y sea $\vec{f} : S \to R^n$ continua en S tal que $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}), \forall \vec{x} \in S$.

Para toda curva γ entre $\vec{x}, \vec{y} \in S$, regular a trozos en S y descrita por la función vectorial $\vec{\varphi}$ regular a trozos, se verifica que

$$\int_{\gamma[\vec{x},\vec{y}]}\vec{f}.d\vec{\varphi} = \int_{\gamma[\vec{x},\vec{y}]}\vec{\nabla}\phi.d\vec{\varphi} = \phi(\vec{y}) - \phi(\vec{x})$$

Demostración:

Sea $\vec{\varphi} : [a,b] \to R^n$, eligiendo $[a,b]$ de modo que $\vec{\varphi}(a) = \vec{x}, \vec{\varphi}(b) = \vec{y}$, y sea su función derivada $\vec{\varphi}' = (\varphi_1',...,\varphi_n')$. Consideremos la partición P del intervalo $[a,b]$ de la forma $P = \{t_0 = a, t_1,...,t_m = b\}$ y definamos la función real $F : [a,b] \to R$ por:

$$\forall t \in [a,b], F(t) = \phi(\vec{\varphi}(t))$$

de lo cual

$$F'(t) = \vec{\nabla}\phi(\vec{\varphi}(t)).\vec{\varphi}'(t) = \vec{f}[\vec{\varphi}(t)].\vec{\varphi}'(t)$$

válida para cada t de cada subintervalo abierto (t_{k-1}, t_k)

Por la propiedad de la expresión escalar:

$$\int_{\gamma[\vec{x},\vec{y}]}\vec{f}.d\vec{\varphi} = \sum_{r=1}^{n}\int_{a}^{b} f_r[\vec{\varphi}(t)].d\varphi_r(t) = \sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sum_{r=1}^{n} f_r[\vec{\varphi}(t)].\varphi_r'(t).dt = \sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\vec{f}[\vec{\varphi}(t)].\vec{\varphi}'(t).dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}F'(t).dt = \sum_{k=1}^{m}F(t)\Big|_{t_{k-1}}^{t_k} = \sum_{k=1}^{m}\left[F(t_k) - F(t_{k-1})\right] = F(t_m) - F(t_0) = F(b) - F(a) = \phi(\vec{y}) - \phi(\vec{x})$$

09. Bibliografía

APOSTOL, T.M., Análisis Matemático. Editorial Reverté, 1972
CASTRO BRZEZICKI, A., Complementos de Matemáticas. Ed. SAETA, 1970
DIEUDONNE, J., Elementos de Análisis Matemático. Editorial Reverté, 1972
SPIVAK, M., Cálculo en Variedades. Editorial Reverté, 1979

Carmen SANCHEZ DÍEZ
titakrmen@hotmail.com