Sobre la definición de la integración Riemann

00_Introducción:

En el ámbito escolar es la integral de Riemann la primera idea de cálculo integral que adquiere el estudiante de Matemática. Se le presenta siempre indisolublemente unida al cálculo del área barrida por una curva plana sobre un intervalo cerrado. Sin embargo, con el tiempo se descubre que la integral de Riemann necesita generalizarse en varios aspectos, apareciendo la integral de Riemann-Stieltjes y, cuando se pasa al caso de integración de funciones vectoriales n-dimensionales, la integral curvilínea.

Fue Bernhard Riemann (1826-1866) quien propuso la integración de sumas construidas a partir de una función en lo que hoy se denomina Integral de Riemann. Su trabajo fue seguido del de Thomas Jan Stieltjes (1856-1894), matemático y astrónomo holandés que propuso la idea de generalizar la integral de Riemann a fin de poder hacer frente a los cálculos que contenían series de Fourier, sumas infinitas, etc., en su obra *Recherches sur les fractions continúes,* publicada 18 de junio de 1894, precisamente el mismo año de su fallecimiento.

Bernhard Riemann

Thomas Jan Stieltjes

Una idea fundamental en la definición de la integral de Riemann es la idea de partición de un intervalo cerrado $[a,b]$, esto es, la idea del conjunto de números reales $x_0, x_1, ..., x_m$ tales que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{m-1} < x_m = b$$

con los diferentes subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{m-1}, x_m]$ cumpliendo:

$$\bigcup_{j=1}^{m}\left[x_{j-1},x_j\right]=\left[a,b\right]$$
$$\bigcap_{j=1}^{m}\left(x_{j-1},x_j\right)=\phi$$

y las longitudes correspondientes:

$$L\left[a,b\right]=b-a,\ \ \Delta x_j=x_j-x_{j-1}\rightarrow L\left[a,b\right]=\sum_{j=1}^{m}\Delta x_j$$

Si se llama $\mathrm{P}\left[a,b\right]$ al conjunto de todas las particiones posibles del intervalo $\left[a,b\right]$, podemos considerar las particiones $p1,p2,...\in\mathrm{P}\left[a,b\right]$ y decimos que la partición pk es más fina que la partición pl sii $pl\subset pk$.

01_La integral de Riemann

Sea la función $f:\left[a,b\right]\rightarrow R$ y consideremos la suma

$$S(p,f)=\sum_{j=1}^{m}f(u_j).\Delta x_j$$

donde $p=\left\{a=x_0<x_1<...<x_m=b\right\}$, $u_j\in\left[x_{j-1},x_j\right]$, $\Delta x_j=x_j-x_{j-1}$

Se dice que f es integrable Riemann en $\left[a,b\right]$ sii se verifica que cualquiera que sea el número real ε, por muy pequeño que se elija, siempre existe una partición $p\varepsilon$ tal que para cualquier otra partición p más fina que $p\varepsilon$, y cualesquiera que sean los u_j que se elijan, existe un único número real I tal que la distancia al valor de la suma es menor que ε. O sea:

$$\forall\varepsilon>0,\exists p\varepsilon\in\mathrm{P}\left[a,b\right]/\ \forall p\in\mathrm{P}\left[a,b\right],\ p\varepsilon\subset p\wedge\forall u_j\in\left[x_{j-1},x_j\right],$$
$$\exists I\in R/\left|I-S(p,f)\right|<\varepsilon$$

El número real I se llama *integral de Riemann* de la función f en el intervalo $\left[a,b\right]$, y puede representarse por

$$I=\int_a^b f.dx$$

La función f se dice integrable Riemann en $\left[a,b\right]$ si existe la integral en dicho intervalo. Podemos simbolizar por $R(\left[a,b\right])$ al conjunto de todas las funciones integrables Riemann en $\left[a,b\right]$, del mismo modo que representamos por $C^1(\left[a,b\right])$ a las funciones diferenciables con continuidad en el intervalo.

Notas:

- Toda función f acotada y continua en $\left[a,b\right]$ es integrable Riemann en $\left[a,b\right]$, y, de acuerdo con el criterio de integrabilidad de Lebesgue, toda función definida y acotada en $[a,b]$ con un conjunto C de discontinuidades será integrable Riemann en $[a,b]$ si C tiene medida cero.

- Las propiedades básicas de la determinación de la integral de una función integrable Rieman son la linealidad, la aditividad del intervalo de integración y la formulación por partes:

a) $\forall f_1, f_2 \in R([a,b]), \forall c_1, c_2 \in R,\ c_1 f_1 + c_2 f_2 \in R([a,b])$

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)).dx = c_1 \int_a^b f_1(x).dx + c_2 \int_a^b f_2(x).dx$$

b) $f \in R([a,b]) \rightarrow \forall c \in R / a < c < b,\ f \in R([a,c]) \wedge f \in R([c,b])$

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$$

c) $\forall f, g \in R([a,b]) / f, g \in C^1([a,b]) \rightarrow f.g' + g.f' \in R([a,b])$

$$f(b).g(b) - f(a).g(a) = \int_a^b f(x).g'(x).dx + \int_a^b g(x).f'(x).dx$$

02_La integral de Riemann-Stieltjes

Consideremos la función continua $\varphi : [a,b] \rightarrow R$ y sea $\Gamma(\varphi)$ la curva que define.

Sea la función $f : \Gamma(\varphi) \rightarrow R$ definida sobre la curva $\Gamma(\varphi)$ y consideremos la suma

$$S(p, f, \varphi) = \sum_{j=1}^{m} f(\varphi(u_j)).\Delta\varphi(x_j)$$

donde $p = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b\}$, $u_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $\Delta\varphi(x_j) = \varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})$

Se dice que f es integrable Riemann-Stieltjes en $[a,b]$ respecto de la función integradora continua φ sii se verifica que cualquiera que sea el número real ε, por muy pequeño que se elija, siempre existe una partición $p\varepsilon$ tal que para cualquier otra partición p más fina que $p\varepsilon$, y cualesquiera que sean los u_j que se elijan, existe un único número real I tal que la distancia al valor de la suma es menor que ε. O sea:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p\varepsilon \in \mathrm{P}[a,b] / \forall p \in \mathrm{P}[a,b],\ p\varepsilon \subset p \wedge \forall u_j \in [x_{j-1}, x_j],$$
$$\exists I \in R / |I - S(p, f, \varphi)| < \varepsilon$$

El número real I se llama *integral de Riemann-Stieltjes* de la función f en el intervalo $[a,b]$ con respecto a φ, y puede representarse por

$$I = \int_a^b f(x).d\varphi(x)$$

Notas:

- Si la función integradora φ fuera la identidad, es decir, si $\varphi(x) = x, \forall x \in [a,b]$, entonces la integral de Riemann-Stieltjes es, precisamente, la integral de Riemann.

03_La integral Curvilínea

Consideremos la función vectorial continua n-dimensional $\vec{\varphi}:[a,b]\to R^n$ y sea $\Gamma(\vec{\varphi})$ la curva de R^n definida por tal función.

Sea la función $\vec{f}:\Gamma(\vec{\varphi})\to R^n$ definida sobre la curva $\Gamma(\vec{\varphi})$ y consideremos la suma

$$S(p,f,\varphi)=\sum_{j=1}^{m}\vec{f}(\vec{\varphi}(u_j)).\Delta\vec{\varphi}(x_j)$$

donde $p=\{a=x_0<x_1<...<x_m=b\}$, $u_j\in[x_{j-1},x_j]$, $\Delta\vec{\varphi}(x_j)=\vec{\varphi}(x_j)-\vec{\varphi}(x_{j-1})$

Se dice que $\vec{f}$ es integrable respecto de la función integradora continua $\vec{\varphi}$ a lo largo del camino $\Gamma(\vec{\varphi})$ obtenido desde el intervalo cerrado $[a,b]$ sii se verifica que cualquiera que sea el número real ε, por muy pequeño que se elija, siempre existe una partición $p\varepsilon$ tal que para cualquier otra partición p más fina que $p\varepsilon$, y cualesquiera que sean los u_j que se elijan, existe un único número real I tal que la distancia al valor de la suma es menor que ε. O sea:

$$\forall\varepsilon>0,\exists p\varepsilon\in \mathrm{P}[a,b]/\forall p\in \mathrm{P}[a,b],\ p\varepsilon\subset p\wedge\forall u_j\in[x_{j-1},x_j],$$
$$\exists I\in R/\left|I-S(p,f,\varphi)\right|<\varepsilon$$

El número real I se llama *integral Curvilínea* de la función $\vec{f}$ en el intervalo $[a,b]$ con respecto a $\vec{\varphi}$, y puede representarse por

$$I=\int_{\Gamma(\vec{\varphi})}\vec{f}(x).d\vec{\varphi}(x)$$

Nota:

- Si n=1, la integral Curvilínea es, precisamente, la integral de Riemann-Stieltjes.

Proposición 1:
La integral curvilínea de una función $\vec{f}=(f_1,f_{2,...,}f_n)$, con respecto a la función integradora continua $\vec{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)$, puede expresarse, para una partición cualquiera $p=\{x_0,x_1,...,x_m\}$ del intervalo $[a,b]$ de integración, por

$$\int_{\Gamma(\vec{\varphi})}\vec{f}(\vec{\varphi}).d\vec{\varphi}=\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k[\vec{\varphi}(x)].d\varphi_k(x)$$

Demostración:
Puesto que, al ser un producto escalar, es $\vec{f}.\vec{\varphi}=\sum_{j=1}^{n}f_j.\varphi_j$ se tiene que al considerar

$$S(p,f,\varphi)=\sum_{j=1}^{m}\vec{f}(\vec{\varphi}(u_j)).\Delta\vec{\varphi}(x_j)$$

donde $p = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b\}$, $u_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $\Delta\vec{\varphi}(x_j) = \vec{\varphi}(x_j) - \vec{\varphi}(x_{j-1})$

será: $S(p, f, \varphi) = \sum_{j=1}^{m} \vec{f}(\vec{\varphi}(u_j)).\Delta\vec{\varphi}(x_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{\varphi}(u_j)).\Delta\varphi_k(x_j) =$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_k(\vec{\varphi}(u_j)).\Delta\varphi_k(x_j) = \sum_{k=1}^{n} S(p, f_k, \varphi_k) \to S(p, \vec{f}, \vec{\varphi}) = \sum_{k=1}^{n} S(p, f_k, \varphi_k)$$

por tanto, si $\vec{f}$ es integrable, también son integrables las f_k, $k=1,2,...,n$, cumpliéndose que

$$\int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}(\vec{\varphi}).d\vec{\varphi} = \sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(\vec{\varphi}(x)).d\varphi_k(x)$$

En definitiva, la integral curvilínea n-dimensional puede expresarse como una suma de n integrales de Riemann-Stieltjes.

Proposición 2: (Linealidad)
Sean las funciones n-dimensionales definidas y acotadas en un intervalo $[a,b]$ $f_1 : [a,b] \to R^n$, $f_2 : [a,b] \to R^n$ y sea la función vectorial continua $\vec{\varphi} : [a,b] \to R^n$.
Si existen las integrales curvilíneas $\int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_1.d\vec{\varphi},\ \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} f_2.d\vec{\varphi}$, entonces también existe la integral $\int_{\Gamma(\vec{\varphi})} (c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2).d\vec{\varphi},\ \forall c_1, c_2 \in R$, cumpliéndose que

$$\int_{\Gamma(\vec{\varphi})} (c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2).d\vec{\varphi} = c_1 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_1.d\vec{\varphi} + c_2 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_2.d\vec{\varphi}$$

Demostración:

- Si existe $\int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_1.d\vec{\varphi}$ se tiene que $\forall\varepsilon > 0, \exists p_{1\varepsilon} \in P[a,b] / \forall p \in P[a,b], p_{1\varepsilon} \subset p$ es

$$\left| S(p, \vec{f}_1, \vec{\varphi}) - \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_1.d\vec{\varphi} \right| < \frac{\varepsilon}{2|c_1|}$$

- Si existe $\int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_2.d\vec{\varphi}$ se tiene que $\forall\varepsilon > 0, \exists p_{2\varepsilon} \in P[a,b] / \forall p \in P[a,b], p_{2\varepsilon} \subset p$ es

$$\left| S(p, \vec{f}_2, \vec{\varphi}) - \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_2.d\vec{\varphi} \right| < \frac{\varepsilon}{2|c_2|}$$

- Si llamamos $\vec{f} = c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2$, es $S(p, \vec{f}, \vec{\varphi}) = \sum_{j=1}^{m} \vec{f}[\vec{\varphi}(x_j)](\vec{\varphi}(x_j) - \vec{\varphi}(x_{j-1})) =$

$$= \sum_{j=1}^{m} (c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2)[\vec{\varphi}(x_j)](\vec{\varphi}(x_j) - \vec{\varphi}(x_{j-1})) = c_1\sum_{j=1}^{m} \vec{f}_1[\vec{\varphi}(x_j)](\vec{\varphi}(x_j) - \vec{\varphi}(x_{j-1})) +$$

$$+ c_2\sum_{j=1}^{m} \vec{f}_2[\vec{\varphi}(x_j)](\vec{\varphi}(x_j) - \vec{\varphi}(x_{j-1})) = c_1.S(p, \vec{f}_1, \vec{\varphi}) + c_2.S(p, \vec{f}_2, \vec{\varphi})$$

- Entonces se tendrá que
$\forall\varepsilon > 0, \exists p_\varepsilon = p_{1\varepsilon} \cup p_{2\varepsilon} \in P[a,b] / \forall p \in P[a,b], p_\varepsilon \subset p$

$$\left| S(p,\vec{f},\vec{\varphi}) - \left(c_1 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_1.d\vec{\varphi} + c_2 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_2.d\vec{\varphi} \right) \right| =$$

$$= \left| c_1 S(p,\vec{f}_1,\vec{\varphi}) + c_2 S(p,\vec{f}_2,\vec{\varphi}) - \left(c_1 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_1.d\vec{\varphi} + c_2 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_2.d\vec{\varphi} \right) \right| =$$

$$= \left| \left(c_1 S(p,\vec{f}_1,\vec{\varphi}) - c_1 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_1.d\vec{\varphi} \right) + \left(c_2 S(p,\vec{f}_2,\vec{\varphi}) - c_2 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_2.d\vec{\varphi} \right) \right| \le$$

$$\le \left| c_1 S(p,\vec{f}_1,\vec{\varphi}) - c_1 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_1.d\vec{\varphi} \right| + \left| c_2 S(p,\vec{f}_2,\vec{\varphi}) - c_2 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_2.d\vec{\varphi} \right| = |c_1| \left| S(p,\vec{f}_1,\vec{\varphi}) - \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_1.d\vec{\varphi} \right| +$$

$$+ |c_2| \left| S(p,\vec{f}_2,\vec{\varphi}) - \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_2.d\vec{\varphi} \right| \le |c_1| \frac{\varepsilon}{2|c_1|} + |c_2| \frac{\varepsilon}{2|c_2|} = \varepsilon$$, por tanto es

$$\int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}.d\vec{\varphi} = c_1 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_1.d\vec{\varphi} + c_2 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_2.d\vec{\varphi} \rightarrow \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} (c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2).d\vec{\varphi} = c_1 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_1.d\vec{\varphi} + c_2 \int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}_2.d\vec{\varphi}$$

Proposición 3: (Aditividad del camino de integración)
Sea la curva $\Gamma(\vec{\varphi})$ descrita por la función vectorial continua $\vec{\varphi}:[a,b] \rightarrow R^n$, tal que es $\Gamma(\vec{\varphi}) = \Gamma_1(\vec{\varphi}) + \Gamma_2(\vec{\varphi})$. Entonces, si existen dos de las integrales siguientes, también existe la tercera, cumpliéndose que

$$\int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}.d\vec{\varphi} = \int_{\Gamma_1(\vec{\varphi})} \vec{f}.d\vec{\varphi} + \int_{\Gamma_2(\vec{\varphi})} \vec{f}.d\vec{\varphi}$$

Demostración:

- Consideremos un punto intermedio $c \in [a,b]$ tal que

  $\vec{\varphi}([a,c]) = \Gamma_1(\varphi) \wedge \vec{\varphi}([c,b]) = \Gamma_2(\varphi)$

  y llamemos

  $p' = p \cap [a,c],\ p'' = p \cap [c,b]$

  siendo

  $p = \{x_0, x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_m\},\ p' = \{x_0, x_1, \ldots, x_r\},\ p'' = \{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_m\}$

  Se tiene entonces que

$$S(p,\vec{f},\vec{\varphi}) = \sum_{j=1}^{m} \vec{f}(\vec{\varphi}(x_j))(\vec{\varphi}(x_j) - \vec{\varphi}(x_{j-1})) = \sum_{j=1}^{r} \vec{f}(\vec{\varphi}(x_j))(\vec{\varphi}(x_j) - \vec{\varphi}(x_{j-1})) +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{m} \vec{f}(\vec{\varphi}(x_j))(\vec{\varphi}(x_j) - \vec{\varphi}(x_{j-1})) = S(p',\vec{f},\vec{\varphi}) + S(p'',\vec{f},\vec{\varphi})$$

  por lo cual si existen ambas integrales $\int_{\Gamma(\vec{\varphi}_1)} \vec{f}.d\vec{\varphi}$ y $\int_{\Gamma(\vec{\varphi}_2)} \vec{f}.d\vec{\varphi}$, será

- Si existe $\int_{\Gamma(\vec{\varphi}_1)} \vec{f}.d\vec{\varphi}$ se tiene que $\forall \varepsilon > 0, \exists p'_\varepsilon \in \mathrm{P}[a,b] / \forall p' \in \mathrm{P}[a,b],\ p'_\varepsilon \subset p'$ es

$$\left| S(p',\vec{f},\vec{\varphi}) - \int_{\Gamma(\vec{\varphi}_1)} \vec{f}.d\vec{\varphi} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- Si existe $\int_{\Gamma(\vec{\varphi}_2)} \vec{f}.d\vec{\varphi}$ se tiene que $\forall \varepsilon > 0, \exists p''_\varepsilon \in \mathrm{P}[a,b] / \forall p'' \in \mathrm{P}[a,b],\ p''_\varepsilon \subset p''$ es

$$\left| S(p'', \vec{f}, \vec{\varphi}) - \int_{\Gamma(\vec{\varphi}_2)} \vec{f}.d\vec{\varphi} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto:

$$\left| S(p, \vec{f}, \vec{\varphi}) - \left(\int_{\Gamma(\vec{\varphi}_1)} \vec{f}.d\vec{\varphi} + \int_{\Gamma(\vec{\varphi}_2)} \vec{f}.d\vec{\varphi} \right) \right| = \left| S(p', \vec{f}, \vec{\varphi}) + S(p'', \vec{f}, \vec{\varphi}) - \left(\int_{\Gamma(\vec{\varphi}_1)} \vec{f}.d\vec{\varphi} + \int_{\Gamma(\vec{\varphi}_2)} \vec{f}.d\vec{\varphi} \right) \right| =$$

$$= \left| \left(S(p', \vec{f}, \vec{\varphi}) - \int_{\Gamma(\vec{\varphi}_1)} \vec{f}.d\vec{\varphi} \right) + \left(S(p'', \vec{f}, \vec{\varphi}) - \int_{\Gamma(\vec{\varphi}_2)} \vec{f}.d\vec{\varphi} \right) \right| \leq \left| S(p', \vec{f}, \vec{\varphi}) - \int_{\Gamma(\vec{\varphi}_1)} \vec{f}.d\vec{\varphi} \right| +$$

$$+ \left| S(p'', \vec{f}, \vec{\varphi}) - \int_{\Gamma(\vec{\varphi}_2)} \vec{f}.d\vec{\varphi} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$, por tanto

$$\int_{\Gamma(\vec{\varphi})} \vec{f}.d\vec{\varphi} = \int_{\Gamma_1(\vec{\varphi})} \vec{f}.d\vec{\varphi} + \int_{\Gamma_2(\vec{\varphi})} \vec{f}.d\vec{\varphi}$$

04_Bibliografía:

Apostol, Tom M.; *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, 1976.
Bartle, R. G.; *Introducción al Análisis Matemático*, Editorial Limusa, 1982
Castro, A. de; *Complementos de análisis mate*mático, Editorial S.A.E.T.A., 1972
Dieudonné, J.; *Fundamentos de análisis matemático*, Editorial Reverté, 1979
Kurtz, D.S.-Schwartz, C.W.;*Theories of Integration. The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil and McShane, Editorial World Scientific, 2004*
Rudin, W.; *Principios de Análisis Matemático*, Editorial Mc Graw Hill, 1990
Spivak, M.; *Cálculo en Variedades*, Editorial Reverté, 1988