El desarrollo histórico de la lógica matemática
(The historical development of mathematical logic)

José Jesús Mena Delgadillo

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad: Cuajimalpa.

Resumen.

En el presente trabajo de divulgación, se presenta el origen histórico y el desarrollo de la lógica matemática, a partir del esclarecimiento del método axiomático en la geometría, y de la crisis de los fundamentos de la matemática.

Descriptores.

Lógica matemática, Sistema formal, Geometría Euclideana, Geometrías No-Euclideanas, Método axiomático de la lógica, Consistencia Lógica, Independencia lógica, Escuelas de lógica matemática.

Abstract.

This work of popularization, presents origin and development of mathematical logic, from the clarification of the axiomatic method in geometry and the crisis of mathematics.

Keywords.

Mathematical logic, Formal systems, Euclidean geometry, No-Euclidean geometry, Axiomatic method of logic, Logical consistency, Logical independence, Schools of mathematical logic.

1 Introducción.

La finalidad del presente ensayo es mostrar el origen y desarrollo de la lógica matemática, desde un punto histórico. Primero por el desarrollo de la lógica tradicional y segundo debido al nacimiento del método axiomático, hasta la crisis de los fundamentos de la matemática a fines del siglo XIX.

Estos dos puntos de vista, se producen a fines del XIX y marcan el inicio de la lógica matemática.
El primero de estos puntos de vista, el desarrollo del método axiomático, resulta del estudio comparativo de la geometría euclideana y la geometría no-euclideana; estudio de que surge en forma natural, el método axiomático.
El segundo punto de vista, corresponde al desarrollo de la lógica tradicional hasta la crisis de los fundamentos de la matemática y se inicia el proceso de matematizar la lógica y fundamentar con el auxilio de la lógica, la matemática.

2 Geometría pre-euclidiana.

La tradición griega se remonta a los orígenes de la geometría a la agrimensura de Egipto. En donde la renta publica era fijada por la imposición de impuestos sobre la tierra cultivable y cuando los desbordamientos del Río Nilo arrasaban los limites entre vecinos, era necesario restaurarlos y determinar el área original por cálculo basado en mediciones. O bien; Si el Río barre una porción de la parcela y el propietario solicitaba la correspondiente deducción del impuesto, los supervisores tenían que ser enviados a certificar cuál había sido la reducción del área.
Tales de Mileto fue a Egipto y llevo la geometría a Grecia. Pero lo que aprendió en Egipto fue fundamentalmente un conjunto de reglas geométricas y no hay vestigios documentales de algún intento de dar una prueba de alguna regla utilizada, es decir aparentemente no tenían idea de la geometría como una ciencia demostrativa.
La Geometría en sentido demostrativo fue creación de los griegos. Nadie anteriormente había probado propiedades tales como el caso de dos ángulos de la base de un triangulo isósceles son iguales; esta y otras ideas fue una inspiración única en la historia del mundo, y el fruto de ello fue el origen de las matemáticas como una ciencia formal.
La fuente de información disponible más importante acerca de las matemáticas egipcias corresponde al papiro Rhind, escrito alrededor de 1650 A.C. pero copiado de un original del tiempo de Amenemhet III, quien gobernó de 1849 a 1801 A.C. La geometría descrita en esta regla de cálculos es un conjunto de mediciones aproximadas.
Tales de Mileto, cuya madre fue de origen fenicio vivió alrededor de 624 a 547 A.C. considerado un sabio en su época, sus estudios de la matemática, excepto aquella que versa sobre el concepto de número, se refieren a la Geometría, y son las siguientes, [1] :

I) Medición de la altura de una pirámide.

Tales provocó admiración general al mostrar cómo calcular la altura de una pirámide por medio de sombras. Hay dos versiones. La más antigua es la de Jerónimo, un discípulo de Aristóteles, quien decía que Tales observó la longitud de su sombra cuando era de la misma longitud de su altura, y en ese momento midió la sombra de la pirámide. Una versión posterior debida a Plutarco menciona que clavo una estaca al final de la sombra de la pirámide y habiendo formado de esta manera dos triángulos semejantes argumento que la altura de la pirámide es a la altura de la estaca, como la sombra de la estaca es a la sombra de la pirámide. La única dificultad en este tipo de método sería medir o estimar la longitud de la sombra de la pirámide.

(II) Los teoremas generales de geometría elemental atribuidos a Tales de Mileto, se enuncian a continuación:

1) Un circulo siempre es bisectado por su diámetro.

2) Los ángulos de la base de un triángulo isósceles siempre son iguales.

3) Si dos líneas rectas se cortan entre sí, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

4) Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente y un lado igual a un lado, entonces los triángulos son iguales.

5) Pánfilo afirma que Tales fue el primero en describir en un circulo un triángulo rectángulo: Esto significa que descubrió que el ángulo en un semicírculo es un ángulo recto.

La historia de la Geometría entre el periodo de Tales y Pitágoras es irrelevante excepto por el sumario de Proclo que da el nombre de un autor que se ocupo de la Geometría; el nombre es dado de diferentes maneras, según las versiones de Proclo, Suidas y Herón. Suidas menciona que Anaximandro (Nacido alrededor del año 611 A. C.), introdujo el reloj solar con aguja vertical (gmonon) generalmente expone un bosquejo de Geometría. Es probable que la palabra Geometría se expusiera en este caso en su sentido primitivo de la "medición de la Tierra" y que la referencia no corresponde propiamente a un trabajo de Geometría, sino al famoso mapa de un mundo habitado. Pues Anaximandro fue el primer hombre en dibujar tal mapa.

Los Egipcios dibujaron mapas, pero solo de distritos particulares; Por ejemplo Anaximandro concibió el mundo total con la circunferencia de la Tierra y la mar, además mostró los solsticios, las horas, las estaciones y los equinoccios. De acuerdo a Herodoto, los griegos aprendieron el uso del reloj de sol (gnomon) de los Babilonios.
Alrededor de cincuenta años separan a Pitágoras de Tales de Mileto. Con Pitágoras llega la Geometría a ser por primera vez un tema científico, examinando los teoremas ampliamente y a través de una manera propiamente intelectual. Es decir Pitágoras primero, propuso ciertos principios (definiciones), y después construyo a partir de ellos una sucesión ordenada de proposiciones. Se menciona un lema Pitagórico en donde cada nuevo teorema establece una plataforma desde la cual se accede al siguiente y así sucesivamente.
A continuación se establecen las proposiciones que son atribuidas a los Pitagóricos, a saber, [1]:

a) La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos.

b) El teorema de Pitágoras.

c) Aplicación de la Geometría en el cálculo de áreas.

d) El descubrimiento de los números Inconmensurables (Irracionales).
Es útil sintetizar las contribuciones de Pitágoras y los Pitagóricos a la Geometría. Con ellos la Geometría llego a ser una ciencia estudiada por su propio objeto.

En definitiva las contribuciones de los Pitagóricos en Geometría fueron, [2]:

a) Conocieron las propiedades de las líneas paralelas, y las usaron para probar en general que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos. Dedujeron los teoremas acerca de los ángulos exteriores y de los ángulos interiores de cualquier polígono.

b) La construcción de áreas a partir de figuras rectilíneas y la suma y diferencia de tales áreas en áreas equivalentes de diferentes formas. Para este fin inventaron el "método de aplicación de áreas", el principal elemento del álgebra geométrica por el cual aplicaron el equivalente geométrico de la adición, sustracción, división, extracción de raíz cuadrada y finalmente el teorema del cuadrado de la hipotenusa y de las proporciones.

c) Tenían una teoría de la proporciones totalmente desarrollada, aunque era solo aplicable a magnitudes conmensurables, siendo tal vez una teoría numérica sobre los lineamientos del libro VII de Euclides.
Estuvieron enterados de las propiedades de figuras semejantes; pues Plutarco atribuye al mismo Pitágoras la solución del problema de describir una figura rectilínea semejante a una figura dada e igual en área a otra, y esto implica un conocimiento del teorema de que figuras rectilíneas semejantes están en razón doble de los lados correspondientes. Mucho del contenido del libro VI de Euclides debe por tanto haber sido conocido por los Pitagóricos.
Nos dice Aristóteles, que no todo el conocimiento es demostrativo. Acorde con esta afirmación proveyó de bases filosóficas para la demostración. La demostración debe de empezar con verdades auto-evidentes que son no demostrables, a si mismas. Estas deben a su vez ser claramente verdaderas y mejor conocidas que cualquiera cosa que sea subsecuentemente probada de ellas.
Otro aspecto de Aristóteles que debe de ser mencionado es su teoría de la definición, nos dice, es una frase que significa la esencia de una cosa. Los objetos tienen propiedades que son de dos tipos: esenciales y accidentales, pero solo las primeras entran en la definición de un objeto, una definición, para él, era también objetiva y si era correcta, entonces necesariamente verdadera. En realidad Aristóteles le otorgo a Sócrates el crédito de ser el primero en hacer notar el problema de la definición universal, y dijo que era natural que Sócrates buscara la esencia de las cosas, pues estaba buscando silogizar. Sin embargo, Aristóteles no considero una definición verdadera hasta que hubiera sido mostrado que la palabra definida se refería a algo que existía y hasta que la definición hubiera expresado las propiedades esenciales de la cosa, en términos de los cuales fuera mejor conocida la palabra definida. Una definición como apunta Aristóteles varias veces, no asegura la existencia la existencia del objeto definido; esto debe de ser probado o asumido.

3 La estructura de los elementos de Euclides.

Los dos desarrollos de las matemáticas griegas, que se convirtieron en relevantes para la lógica fueron: el primero es la sistematización del conocimiento geométrico, el segundo es la formulación de problemas geométricos que los griegos en su momento no pudieron resolver.

El constructor del gran sistema de la Geometría antigua es desde luego Euclides. Desafortunadamente poco o nada se sabe de él. Como el nombre Bourbaki en matemáticas contemporáneas, hace pensar que es posible que el nombre Euclides se refiera no a un nombre sino a varios. En todo caso probablemente vivió alrededor del año 300 A.C. La tradición dice que era platónico. Si es verdad, la siguiente, la siguiente antigua anécdota adquiere crédito, ya que las teorías de Platón no ponían énfasis en aplicaciones practicas. Dicha anécdota es:

Alguien que había empezado a estudiar Geometría con Euclides, cuando hubo aprendido el primer teorema, pregunto a Euclides: "¿ Pero qué obtendré con aprender estas cosas ?", Euclides llamo a su esclavo y le dijo: "dale tres monedas pues debe obtener ganancia de lo que aprende".

Euclides escribió otros trabajos además de sus Elementos, pero sólo éste último es importante para el desarrollo de la Lógica. Puesto que Euclides en este libro deseaba sistematizar el conocimiento geométrico.

Platón estableció una Academia cuyo propósito consistía en el avance del conocimiento. Sobre la entrada del recinto se decía que escribió: "Que nadie que no sepa Geometría atraviese mi puerta". Plutarco comentó que Platón decía que Dios hacia Geometría continuamente. Estas alusiones junto con grandes pasajes de los diálogos, confirma que platón valoraba muy alto a la Geometría. En realidad, enfatizó la importancia de la Geometría en la Educación y la importancia del conocimiento de los inconmensurables. Hay evidencia que sugiere que los ya que los Pitagóricos habían fracasado en su intento de basar su cosmología en la Aritmética, Platón intentó basar su cosmología en la Geometría. Aparentemente pensó que su intento fue incompleto y sólo parcialmente afortunado.

A la luz de lo anterior. Los Elementos de Euclides pueden ser contemplado como un intento de continuar con el trabajo de Platón, que es el de basar la Aritmética y la Cosmología en la Geometría. Euclides trabajo la Aritmética desde un punto de vista Geométrico, y la ultima parte de los Elementos concierne a los cinco sólidos regulares, los cuales jugaron un papel importante en la Cosmología de Platón, En donde Euclides deseaba mostrar que la Geometría triunfaría, en donde la Aritmética había fracasado al trabajar con los inconmensurables. Sea lo que fuere la falta de claridad de los propósitos de Euclides, su logro es claro, produjo uno de los grandes libros de texto de todos los tiempos.

El libro principia con una serie de 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes. De éstos, Euclides dedujo un gran número de proposiciones y teoremas. Es importante distinguir las diferencias de estas cuatro categorías (definiciones, postulados, nociones comunes y teoremas). Estas indican la estructura del método axiomático, el cual estaba destinado a estar estrechamente ligado al desarrollo de la Lógica matemática. Solo algunas definiciones están omitidas de las siguientes citas que corresponden al inicio del libro de los Elementos de Euclides, [2]:

Definiciones.

1 El punto es aquello que no tiene parte.

2 Una línea es una longitud sin anchura.

3 Los extremos de una línea recta son puntos.

4 Una línea recta es una línea que subyace uniformemente con todos sus puntos.

5 Una superficie es aquello que solo tiene longitud y anchura.

7 Una superficie plana es una superficie que subyace uniformemente con todas sus líneas rectas.

10 Cuando una línea recta cae sobre otra haciendo los ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la línea recta que cae sobre la otra, es llamada la perpendicular a aquella sobre la cual cae.

15 Un círculo es una figura plana contenida por una línea tal que todas las rectas que caen sobre ella, desde un punto en medio de aquellas que subyacen dentro de la figura, son iguales entre sí.

16 El punto que satisface la definición 15, es llamado centro del círculo.

19 Figuras rectilíneas son aquellas que están contenidas por líneas rectas; figuras triláteras son las contenidas por tres, cuadriláteras las contenidas por cuatro y multiláteras las contenidas por más de cuatro líneas rectas.

20 De las figuras triláteras, un triangulo equilátero es aquel que tiene sus tres lados iguales, un triangulo isósceles, es aquel que tiene dos de sus lados iguales solamente y el triangulo escaleno es aquel que tiene sus tres lados desiguales.

23 Líneas rectas paralelas son líneas rectas que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambas direcciones, no se encuentran en alguna dirección.

Postulados.

1º Se puede trazar una recta entre dos puntos cualesquiera.

2º Se puede prolongar una recta finita de modo que siga siendo recta.

3º Se puede trazar un circulo con cualquier centro y distancia dados.

4º Todos los ángulos rectos son iguales.
5º Si una recta cae sobre otras dos, haciendo los ángulos interiores del mismo lado, menos que dos rectos, las dos líneas rectas, si se prolongan indefinidamente, se encuentran del lado donde los ángulos son menores que dos rectos.

Nociones Comunes.

1º Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.

2º Si a iguales se agregan iguales, los totales son iguales.

3º Si a iguales se restan iguales, los residuos son iguales.

4º Cosas que coinciden son iguales.

5º El todo es mayor que la parte.

El punto de vista de Aristóteles sobre la naturaleza de la ciencia demostrativa al parecer influyo sobre el trabajo de Euclides, en donde para Aristóteles las definiciones como objetivas y verdaderas. Hablando estrictamente, una definición se refiere solamente a la esencia de una cosa, y no dice nada de la existencia de su existencia.

Los postulados corresponden a hacer explicitas las suposiciones de la existencia de algunas cosas que son específicos a términos exclusivamente geométricos , a saber en este caso: puntos y líneas.

Las Nociones comunes (Aristóteles usa el término Opiniones comunes), son suposiciones básicas, que son comunes a cierto número de ciencias.

Es decir, las preposiciones o teoremas son pensados como derivaciones de las definiciones, postulados y nociones comunes sin ninguna otra suposición adicional.

Hay un ultimo requerimiento Aristotélico para un sistema axiomático que el sistema siempre parte de axiomas que son autoevidentes e indemostrables por si mismos, con el fin de evitar falacias epistemológicas. El sistema de Euclides efectivamente satisface este requisito, en donde, los postulados y nociones comunes no se demuestran. Sin embargo aparentemente en el quinto postulado se puede deducir de los otros cuatro postulados que son más simples, y aunque es plausible, podría no ser verdadero, ya que son conocidas otras líneas que convergen pero no se cortan, por ejemplo la hipérbola y sus asintotas.

Estas objeciones fueron hechas, más no contestadas en la antigüedad, y uno de los legados de las matemáticas griegas fue resolver el problema suscitado por el quinto postulado de Euclides, esto es, o probar se verdad o eludir sus dificultades dando por ejemplo, alguna otra definición de paralela (por ejemplo, dos rectas son paralelas si son equidistantes en todos lados).

4 Geometrías No- Euclidianas.

Sabemos por Proclo que Ptolomeo escribió un libro sobre la proposición "líneas rectas trazadas a partir de ángulos que son menores a dos rectos, se encuentran si se prolongan" y usa en su demostración muchos de los teoremas de Euclides.
Ptolomeo trata de probar la proposición "Una recta que cae sobre dos paralelas, hace los ángulos alternos iguales entre sí, el ángulo exterior igual al ángulo interior y opuesto (correspondientes) y los ángulos interiores del mismo lado iguales a dos ángulos rectos" y trata de probarla sin usar el quinto postulado de Euclides, [3]:

Gerolamo Saccheri.

El libro Euclides ab omni naevo vindicatus (1733) por Gerolamo Saccheri (1667-1733), un jesuita y profesor de la Universidad de Pavía. Es de gran importancia debido a su intento para probar el quinto postulado de Euclides, porque Saccheri fue el primero en contemplar la posibilidad de otras hipótesis que planteaba Euclides, y desarrollar las consecuencias de estas hipótesis. El fue por lo tanto el precursor de Legendre, Lobachevsky y Riemann, en donde se obtuvo una visión de la teoría de los paralelos en toda su generalidad.
Puede ser conveniente coleccionar algunos de los más notables sustitutos o equivalentes del quinto postulado de Euclides que han sido sugeridos formalmente o asumidos tácitamente:

1. A través de un punto dado solo a una paralela a una recta dada puede ser trazada o dos rectas que se intersectan entre sí no pueden ser paralelas a una y la misma recta. (“Axioma de Playfard”)

2. Si una recta intersecta a una de dos paralelas a una de dos paralelas, intersectará a la otra. (Proclo)

3. Existen rectas equidistantes en todas partes entre sí.(Posidonio y Geminio).

4. Existe un triangulo en el cual, la suma de los tres ángulos internos es igual a dos ángulos rectos. (Legendre).

5. Dada cualquier figura, existe una figura semejante a ella de cualquier tamaño. (Carnot y Laplace).

6. Dados cualesquiera tres puntos no colineales, existe un circulo que pasa por ellos. (Legendre y Bolilla).

7. Existe un triangulo cuyo contenido es mayor que cualquier dada. (Gauss).

8. Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, el cuarto ángulo, es recto también.(Clairaut).

5 Fundamento lógico de las Geometrías no Euclidianas.

Si el quinto postulado de Euclides o su equivalente, es un verdadero postulado, entonces, el hecho de negarlo, aceptando los demás, no debe conducir a contradicción alguna. Esta fue la idea que maduro en la primera mitad del siglo XIX, que dio por resultado el nacimiento de las Geometrías no

Euclidianas, es decir, de las geometrías en que el quinto postulado de Euclides deja de ser válido.
Las geometrías no-euclidianas no pueden atribuirse a una sola persona. Fueron desarrolladas por un buen número de matemáticos que intentaron ver claro el significado del quinto postulado y se destacan los nombres del alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), el ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) y el húngaro Joharn Bolyai (1802-1860). En realidad los únicos que publicaron los resultados obtenidos fueron los dos últimos.
Los primeros trabajos de LobachevsKy datan de 1826 (memoria presentada a la Universidad de Kazan y cuyo trabajo se ha perdido), siguiendo varias publicaciones hasta 1840, fecha en que aparecen sus famosas investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas, obra escrita en alemán.
Los trabajos de Bolyai empiezan alrededor de 1823.
Tanto Lovachevsky como Bolyai ponen en sus respectivos trabajos las bases de la trigonometría y la geometría no euclidianas.
Bolyai se dedica a distinguir las proposiciones geométricas que necesita el quinto postulado de Euclides de aquellas que son independientes del mismo, a las que llama propiedades absolutas o absolutamente verdaderas. Por otra parte Lovachevsky construye la geometría la geometría no euclidiana, al negar de entrada el quinto postulado de Euclides y suponer, en cambio, que por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela.
La Geometría hiperbólica es una de las geometrías que son llamadas no-euclidianas y la otra es la Geometría Elíptica, [4]:

6 La Geometría hiperbólica.

Durante el periodo entre el tiempo de Euclides y el siglo XIX, una gran cantidad de matemáticos, trataron de deducir el inquietante quinto postulado de Euclides a partir de los otros cuatro postulados por métodos indirectos. Esperando que su negación los condujera a una contradicción. El más persistente fue el Jesuita Gerolamo Saccheri (1667-1773), que descubrió, con el único propósito de demolerlos, muchos teoremas de los que hoy llamamos "Geometría hiperbólica". Fue C. F. Gauss (1777-1865), considerado uno de los mejores matemáticos de todos los tiempos quien primero considero el punto de vista moderno de que no podía resultar algún absurdo o contradicción de la geometría hiperbólica en el cual, el quinto postulado de Euclides se reemplaza por lo siguiente: Para cualquier recta L y cualquier punto P no sobre ella, existe un ángulo OPQ tal que los únicos rayos (rectas) de P que encuentran a L, están dentro de este ángulo. (véase la figura 1).

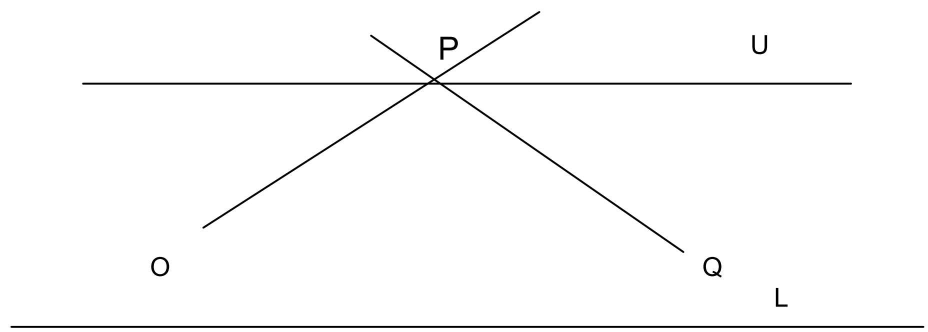

Figura 1.

Los rayos limite PO y PQ se dice que son paralelos a L. Resulta que hay entonces un número infinito de rectas a través de P. Tales como U y todas las demás en el suplemento del ángulo OPQ y se dice que estas rectas son "Ultraparalelas" [4]:

7 La Geometría Elíptica.

La geometría hiperbólica resulto de la negación del quinto postulado de Euclides . La Geometría elíptica resulta de otra negación, y el cambio de sentido del segundo postulado. El segundo postulado de Euclides dice que una recta puede extenderse indefinidamente; esta afirmación significa que una recta es infinita y no cerrada. Sin embargo en la geometría elíptica toda recta es finita aunque no acotada, esto es, tiene una longitud finita y es cerrada como una circunferencia. Sobre la superficie de una esfera la distancia más corta entre dos puntos es un arco de una "gran" circunferencia. Es natural que los navegantes de la antigüedad considerarán tales arcos como la proyección de "segmentos de recta" en una geometría tridimensional. La Geometría esférica fue estudiada por Menéalo de Alejandría, alrededor de 100 A.C. y los árabes, 1000 D.C.

Su teorema más famoso establece que tres ángulos internos de un triangulo esférico ABC satisfacen la desigualdad: $A + B + C > 180^o$ y que el área del triangulo es: $\left(\frac{A+B+C}{180^o}-1\right)\pi$.

La forma circular de la tierra había sido reconocida por gente sin prejuicios desde 240 A.C. Cuando Eratóstenes calculo el diámetro con una exactitud sorprendente.
La forma circular de la Tierra un área finita aunque podemos viajar en línea recta en su superficie toda la vida. En otras palabras, el dominio de la Geometría esférica es finito pero no acotado: Entre 1852 y 1854, Ludwing Schlafli y Bernhard Riemann (1826-1866), en forma independiente concibieron la posibilidad de extender esta idea a tres o más dimensiones
B. Riemman fue un matemático excepcional cuyas ideas, afectaron profundamente a la geometría y al análisis y vislumbraron el desarrollo de la Topología: El nombre de Geometría Riemaniana, se utiliza para materia altamente refinada de la cual la Geometría esférica es tan solo un caso especial. L. Schlafli también hizo contribuciones a la geometría y al análisis.
Félix Klein (1849-1925), quien primero trato de remediar de la Geometría esférica de que dos rectas en un plano (que corresponden a dos grandes circunferencias en una esfera) tienen no solo un punto sino dos puntos en común. Puesto que cada punto determina un único punto antípoda y toda figura se duplica así en las antípoda, resultando en llamarles a tales puntos, pares de puntos antípoda de la esfera unitaria, [4]:

8 Consistencia lógica.

Es interesante considerar el hecho de que, aunque Gauss, Lovachevsky y Bolyai vivieron y murieron con la seguridad intuitiva de que su geometría eran lógicamente consistentes como la de Euclides, no poseían pruebas rigurosas de ello. Tales pruebas tanto para la geometría elíptica como la hiperbólica, fueron proporcionadas por Klein, Eugenio Beltrami (1835-1900) y Henrie Poincare (1854-1912). Por ejemplo Beltrami descubrió en 1868 que las rectas del plano hiperbólico pueden representarse en el plano Euclidiano por medio de cuerdas de un circulo, [5]:

9 El método axiomático formal.

En geometría elemental plana, se encuentran, dos grupos de supuestos fundamentales, titulados: Axiomas o Postulados. La intención de esta clasificación están dadas por: “Un axioma es una verdad autoevidente”. “Un postulado es un hecho geométrico tan simple y obvio que puede suponerse su validez”. Los axiomas trascienden la geometría, pues son verdades universales.

Esta clasificación en “axiomas” y “postulados” tiene su raíz en la ambigüedad. Así encontramos en Aristóteles (384 – 321 A.C.) el siguiente punto de vista: [6].

“Toda ciencia demostrativa tiene que partir de principios indemostrables; de otro modo, los pasos de demostración serian infinitos. De estos principios indemostrables algunos son: comunes a todas las ciencias y otro es peculiares a una ciencia particular; en donde los principios comunes son los axiomas”.

En los elementos de Euclides (escritos alrededor de 300 A.C.) se presentan los dos grupos, con los nombres representativos de “Nociones comunes” y “Postulados”. Partiendo de ellos y de una colección de definiciones, Euclides dedujo en una cadena lógica una cadena de 465 proposiciones. Aunque no se conoce claramente cuál era la base histórica de la obra de Euclides, parece que él no ha sido el creador de este método que consiste en deducir lógicamente de ciertas proposiones sin demostración, dadas al principio. Como acabamos de ver Aristóteles, y también otros autores de este periodo, tenían una noción muy correcta de la naturaleza de una ciencia demostrativa ; y la deducción lógica de las proposiciones matemáticas, lo cual era natural en la Academia platónica y en los Pitagóricos: No obstante, la influencia de Euclides ha sido notable.
El método presentado en la obra de Euclides fue utilizado por Arquímedes (287-212 A.C) en sus dos libros, que suministraron el fundamento de la Mecánica teórica; en el primer libro, Arquímedes demostraba 15 proposiciones partiendo de 7 postulados. Los Principia de Newton, publicados por primera vez en 1686, están organizados como un sistema deductivo en donde las leyes más conocidas del movimiento aparecen como proposiciones indemostrables, o postulados dados desde el principio. El tratado de la Mecánica analítica publicado por Lagrange en 1788 ha sido considerado como una obra maestra de perfección lógica, que parte de proposiciones elementales formuladas explícitamente para obtener las demás proposiciones del sistema.
Existe una extensa literatura dedicada a discutir la naturaleza de los axiomas, los postulados y su trasfondo filosófico.
Actualmente nuestra moderna concepción de los métodos deductivos en general, surgen en gran parte de los estudios de la geometría. Y puesto que la geometría se concibe como una descripción el espacio físico efectivo en que vivimos, surge la convicción de que los axiomas y postulados poseen un carácter de necesidad lógica.
El desarrollo de las geometrías no euclidianas fue una prueba del progresivo reconocimiento de la naturaleza independiente del quinto postulado de

Euclides, este no puede, en efecto, demostrarse como consecuencia lógica de los demás axiomas y postulados del sistema Euclidiano. Mediante una adecuada sustitución del quinto postulado se obtiene una geometría, distinta y lógicamente consistente, por ejemplo la desarrollada por: Bolyai, LobachevsKy y Gauss, en la cual deja de valer el quinto postulado. En 1854 Riemann desarrollo otra geometría eulideana, también compuesta por un conjunto no contradictorio de proposiciones.
La invención de geometrías no euclidianas fue parte de los rápidos desarrollos del siglo XIX, que iban a conducir a aceptar a las geometrías formales.
Nagel describe para explicar el concepto de ciencia formal de Grassmann: "Las ciencias formales se caracterizan por el hecho de que sus únicos principios de procedimiento son reglas de la lógica, así como por la circunstancia de que sus teoremas no son sobre ningún aspecto del mundo existente, sino sobre todo se postula a partir del pensamiento".
La idea expresada por Grassmann es esencialmente lo que hoy se reconoce como geometría formal, en donde un sistema matemático llamado "geometría" no es necesariamente una descripción del espacio real. Hay que distinguir, desde luego, entre el origen de la teoría y la forma de hacia la cual evoluciona. La Geometría, como la Aritmética, se originaron de cosas "practicas"; pero afirmar que un tipo de geometría es una descripción del espacio físico es hacer una descripción física, no una aserción matemática. Es decir es importante distinguir entre la matemática y las aplicaciones de la matemática.
Aunque se ha discutido mucho si el postulado de la paralela debía incluirse entre los "postulados" o entre las "nociones comunes", o axiomas, a final de cuentas quedo claro que ninguno tendría más universalidad que el otro, y por lo tanto, podía abandonarse tal distinción. Por eso en la obra clásica de Hilbert acerca de los fundamentos de la geometría [7], publicada inicialmente en 1899, no se aplica a las afirmaciones o suposiciones fundamentales más que el nombre de "axioma", y algunos términos básicos, como "punto" y "línea", quedan sin definir. Cierto que Hilbert clasifica sus axiomas en cinco grupos, pero esa clasificación se basa sólo en carácter técnico de las afirmaciones, y no en su estatuto de "veracidad" o "universalidad". Aunque la citada obra de Hilbert ha llegado a ser considerada por muchos como la primera que presenta el método axiomático en su forma moderna. Es decir, la matemática evolucionaba de manera tal, que imponía el desarrollo de un método capaz de abarcar en una sola estructura de términos indefinidos y afirmaciones básicas la construcción de conceptos como los de grupo y espacio abstracto, que habían surgido en la matemática aparentemente sin relación entre ellas.
Tal como se utiliza hoy en día en la matemática, el método axiomático consiste en considerar ciertas afirmaciones básicas acerca del concepto que

hay que estudiar, usando algunos términos técnicos formales de la lógica clásica.

10 Consistencia del método axiomático.

Desde el punto de vista lógico se puede establecer la siguiente definición:

Definición 1. Un sistema axiomático Σ se dice consistente si y solo si, no implica enunciados contradictorios.

Definición 2. Si Σ es un sistema axiomático, entonces una interpretación de Σ es un atributo de significaciones a los términos técnicos indefinidos de Σ, de tal modo que los axiomas se conviertan en enunciados verdaderos para todos los valores que tomen las variables.

Definición 3. Un sistema axiomático Σ es satisfactible si existe una interpretación de Σ.

La demostración de consistencia de Σ (sistema axiomático).

Considerando dos leyes básicas de la lógica clásica (Aristotélica), a saber, la ley de contradicción y la ley del Tercio Excluso, esta ultima también llamada "ley de exclusión de medio". Aunque estas "leyes" se consideran "Universalmente válidas", hay que hacer alguna especificación en su aplicación para que resulten válidas, es decir, en cuanto se tiene una interpretación de un sistema Σ, los enunciados del sistema se convierten en enunciados acerca del modelo resultante. De manera tal, que se hace necesario considerar los siguientes principios básicos de lógica aplicada:

1) Todos los enunciados implicados por un sistema axiomático resultan verdaderos para todos los modelos de Σ.

2) La ley de contradicción vale para todos los enunciados acerca de un modelo de un sistema axiomático siempre que sean Σ-enunciados cuyos términos técnicos tengan las significaciones dadas en la interpretación.

Ahora. Si Σ es un sistema axiomático e I denota una interpretación de Σ, entonces el resultado de atribuir a los términos técnicos de un Σ-enunciado sus significaciones en I se llamara un I-enunciado. Con esta terminología 1) y 2) se convierten, respectivamente, en :

1^1) Todo I–enunciado tal que el correspondiente Σ-enunciado esta implicado por Σ, resulta verdadero para M (I).

2^1) I-enunciados contradictorios no pueden ser los dos verdaderos para M(I).

Suponiendo que valgan 1^1) y 2^1), la satisfactibilidad implica la consistencia. Pues si el sistema axiomático Σ implica dos Σ-enunciados contradictorios , entonces por 1^1), esos enunciados, como I-enunciados resultan, los dos verdaderos para el modelo M(I); pero esto es imposible por 2^1). Por lo tanto se concluye que si son validos 1^1) y 2^1), entonces la existencia de una interpretación I, para un sistema axiomático Σ garantiza la consistencia de Σ.
El anterior razonamiento suscita las siguientes reflexiones, en donde, por ejemplo cuando contrastamos modelos de interpretación: "concretos" e "ideales". Por ejemplo, cuando un sistema axiomático Σ requiere un conjunto infinito de cada uno de sus modelos de interpretación, entonces los modelos son necesariamente "ideales". Esto suscita no sólo la cuestión de que en que medida son de fiar los modelos "ideales", sino también la de que como se constituye un modelo admisible. Finalmente nos vemos obligados que en algunos casos no tenemos pruebas absolutas de consistencia, sino sólo lo que podríamos llamar una demostración relativa o plausible de consistencia, [8].

11 La independencia de los axiomas.

Para establecer una definición formal de independencia, consideremos que Σ representa un sistema axiomático y A un axioma de Σ. Denotemos por no-A alguna negación de A y por Σ - A el sistema sin A: Si E es un Σ - enunciado, es decir Σ + E significará el sistema axiomático que contiene los axiomas de Σ y el enunciado E como nuevo axioma. Es decir; Si Σ es un sistema axiomático y A es uno de los axiomas de Σ, entonces se dice que A es independiente en Σ, o que es un axioma independiente de Σ si y solo si se satisface en Σ y (Σ - A) + no-A, [9].

12 Lógica matemática.

El inicio de la Lógica matemática se considera a partir de George Boole (1815-1864) y Augusto de Morgan (1806-1871). Sin embargo, el gran impulso ocurre después de los trabajos de Frege en donde la lógica se desarrolla rápidamente, sobre todo con los trabajos de Schoroeder en (1841-1902) que hicieron posible la gran sistematización de los Principia Matemática (1910-1913) de Whitehead (1861-1947) y Russell (1872 - 1970). Subsecuentemente una nueva área, llamada Metalógica, se desarrollo a partir de los trabajos de Hilbert, Post, Church, Kleene, Turing Y otros. El desarrollo de esta área tiene implicaciones filosóficas de gran envergadura, [10].

La serie de problemas de fundamentos de matemáticas que contribuyeron en la comprensión de los fundamentos de la lógica matemática son:

1) La fundamentación del Análisis.

La significación contemporánea del sistema numérico real para la fundamentación del análisis los matemáticos han dividido la totalidad de las matemáticas en tres grandes categorías: geometría, álgebra y análisis.
En el caso de la geometría, el estudio del espacio iniciado por los antiguos griegos y resumido elegantemente por Euclides en su trabajo denominado "Elementos", posteriormente, junto con una gran cantidad de variaciones, generalizaciones y estudios asociados se han creado las geometrías no-euclidianas de Lovachevski y de Riemann; y las geometrías no-arquimedianas y no-desarguesianas; entre las generalizaciones están las geometrías de grandes dimensiones, la vasta familia de geometrías Riemannianas y desarrollos de la idea de Klein de una geometría como la teoría de invariantes de un grupo de transformaciones definido; y estudios asociados con geometrías finitas, geometrías cuyos elementos no son puntos, y varias teorías abstractas de elementos de conjuntos, generalmente llamados puntos, así como, las relaciones entre estos conjuntos.
El estudio simbólico abstracto de la aritmética ordinaria se llama álgebra, con sus diversas variaciones, generalizaciones y estudios relacionados. Estos estudios se dividen en: teoría de grupos, anillos, dominios enteros, campos, así como los estudios de números hipercomplejos como los cuaternios y matrices.
El análisis consiste en aquellas ramas de la matemática que surgen y están relacionadas con el cálculo. Tales estudios como el calculó mismo, la teoría delas ecuaciones diferenciales, teoría de funciones, la teoría de series infinitas, etc. Se encuentran dentro de esta categoría. En donde el concepto de limite juega un papel fundamental en cada uno de estos casos. La idea de límite distingue el análisis del álgebra[5].

2) Las paradojas y la teoría de Conjuntos.

Después del descubrimiento de las geometrías no-euclidianas ningún otro hecho ha contribuido tan poderosamente en la fundamentación de las matemáticas, como la aparición de las paradojas. En donde se consideran las paradojas lógicas y las semánticas.
Entre las primeras paradojas lógicas (1899) figura la paradoja de G. Cantor (1845-1918), el creador de la teoría de conjuntos, en donde muestra formalmente que el conjunto que contiene a todos los conjuntos implica necesariamente una contradicción.
Probablemente la más famosa de todas las paradojas es la de B. Russell (1872–1970), publicada en 1902, que ha dado lugar a diversas interpretaciones. Esta paradoja se cita en el siguiente enunciado "Los barberos solo pueden afeitar a las personas que no puedan afeitarse. Si existe un único barbero en la comunidad, esté barbero no puede afeitarse por si mismo, entonces algún barbero debería de afeitarle, pero esté es el único barbero". La solución de esta celebre paradoja conduce, a la creación de la Teoría de Tipos que aparece por primera vez en el trabajo realizado por A. N. Whitehead y B. Russell llamado: Principia Matemática (1910) y (1913). En donde desarrollan la teoría que elimina la Paradoja de Russell, creando una jerarquización de tipos, con la finalidad de evitar ciclos, en donde objetos de un tipo dado son creados exclusivamente por objetos de un tipo de jerarquía anterior.
Las teorías del logicismo, formalismo e intuicionismo evitan caer en paradojas. Pero el problema de una solución enteramente satisfactoria de estas paradojas sigue abierto,[11].

3 El problema del infinito.

Si se preguntase por ejemplo en un baile si hay más hombres o mujeres o viceversa, en donde existe procedimientos sencillos para contestar categóricamente dicha pregunta, uno de ellos sería, desde luego, el de contar a los hombres y a las mujeres, y cualquier persona medianamente instruida podría resolver la cuestión planteada, comparando el número de elementos que tiene cada conjunto considerado.
Ahora bien, en un caso más abstracto si nos preguntamos ¿Qué hay más números enteros o números racionales?. La respuesta no es inmediata.
De hecho Galileo (1564 – 1642) se hizo una pregunta semejante y aún escribió en boca de Simplicio el párrafo siguiente:

"Esto de fijar un infinito como mayor que otro infinito es en mi opinión, un concepto que nunca se podrá comprender de ningún modo" .

Efectivamente se podría creer que el espíritu es limitado, y por lo tanto no se puede concebir lo infinito ni dar cuenta de él en términos finitos.

Posteriormente Leíbniz (1646 – 1716) se pregunta ¿Qué hay más números naturales o números pares?. Y afirma:

“El número de todos los números encierra una contradicción? y archiva el problema.

El propio Hilbert (1862-1943). Planteaba el problema de un balneario con tantos vestidores individuales como números: 1,2,3,........,n, n+1, ... todos ocupados, en un cierto momento llega una sucesión de personas: 1,2,3,........,n, n+1, ... a ponerse el traje de baño, entonces ¿Cómo se podría acomodar a todas las personas simultáneamente para que no hubiese 2 personas en un mismo vestidor?.
Para tratar de esclarecer estos problemas, hubo que esperar hasta Cantor (1845-1918) que crea una matemática nueva, la de los conjuntos infinitos y que también contribuyeron a su desarrollo Frege (1848-1925), B. Russell (1872-1970), [12].

13 Escuelas de Lógica Matemática.

En la segunda mitad del siglo XIX se había mostrado que la mayor parte de la matemática, hasta entonces conocida, se podía reducir a un sistema construido a partir de la Aritmética de los números positivos y este hecho solo sirvió para revelar el vació sobre el cual gran parte de ella habría sido construida. Al desarrollar sistemas más complicados a partir de la aritmética elemental, se necesita una teoría de conjuntos, y no solo una teoría de enteros, sino una teoría de conjunto de conjuntos, conjunto de conjuntos de conjuntos y así sucesivamente. Ahora el problema serio en teoría de conjuntos surge para conjuntos infinitos y del conjunto de todos los conjuntos. Los intentos de autores como: Cantor (1845-1918), Frege (1848-1925), B. Russell (1872-1970) y Whitehead con la finalidad de resolver las dificultades inherentes a las paradojas surgidas de la teorías de conjuntos e infinito, este periodo es conocido como escuela logicista. Se menciona que esta etapa fue el fracaso de los intentos por deducir la matemática de la lógica. Sin embargo, se generan problemas matemáticos muy importantes para el siglo XX. De la misma forma se hacen otros intentos para clarificar los problemas que surgen en la fundamentación de la matemática.

Otro enfoque completamente diferente fue el del matemático holandés L. E. J. Brouwer (1881 – 1968); Brouwer encabezó lo que se ha conocido como la escuela intucionista de los matemáticos. El nombre parece implicar un llamado a la intuición en la construcción de las matemáticas. En realidad, las pruebas de los intucionistas son tan rigurosas como las de los matemáticos que pertenecen a otras escuelas. El nombre proviene del hecho que los intucionistas rechazan cualquier intento de basar la aritmética elemental en algún sistema más fundamental y consideran a los enteros positivos como una realidad intuitiva que sirve como base segura para construir nuevos conceptos matemáticos.

Brouwer concibió la idea de existencia en matemáticas como sinónimo de constructivilidad y la verdad como sinónimo de demostrabilidad. De manera que afirmar la verdad formal de un enunciado matemático, es afirmar que tenemos una prueba de él. De modo similar, el afirmar que el enunciado matemático es falso significa que tenemos una prueba de que si el enunciado es verdadero, eso nos conduce a una contradicción.

Para un intucionista, por ejemplo, la ley del medio excluido para cualquier enunciado A, siempre se satisface A ó no-A lo que significa de que tenemos una prueba de A ó tenemos una prueba de no-A, lo que conduce a una contradicción.

La ley del medio excluido por lo tanto en el sistema intucionista.

Nos referiremos ahora al fundador de otra escuela del pensamiento lógico.

David Hilbert (1862-1943), consideró que el intento de basar completamente la matemática a la lógica era demasiado ambicioso. Dejo de lado, la cuestión de la verdad y la falsedad, que siempre había causado dificultades filosóficas, y se concentro sobre la consistencia y completez del conjunto de axiomas. En este contexto la consistencia implica que en cualquier sistema no se puede probar un resultado y su contradicción. La completez significa que se han dado suficientes axiomas de modo que todos los resultados deben de ser deducibles de dichos axiomas. Uno de los primeros logros de D. Hilbert fue formular un conjunto completo de axiomas de la geometría euclidiana.

Dado que D. Hilbert y sus seguidores se concentraron en la construcción de sistemas matemáticos formales, su enfoque fue conocido como formalismo. Para poder examinar la consistencia y completez de cada uno de estos sistemas formales, su programa incluía la construcción de un lenguaje más general, llamado: Metalenguaje, en el cual podrían ser discutidos los sistemas formales, Posteriormente se mostró que la consistencia de los sistemas formales dependía de la consistencia de la aritmética elemental.

El programa de D. Hilbert recibió eventualmente un serio revés. Esto sucedió en 1931. Cuando K. Gödel, anuncio sus resultados concernientes a

proposiciones dudosas de un sistema formal discutido en el trabajo de D. Hilbert.
K. Gödel (1906-1978) mostró en su trabajo conocido como “teorema de incompletud” (1931), que en cualquier sistema suficientemente amplio para expresar la aritmética elemental, o hay proposiciones de las cuales se comprueban son falsas o hay proposiciones no demostrables que son verdaderas, en donde falso y verdadero tienen una interpretación dada de acuerdo con el sistema correspondiente. Este es probablemente de los más importantes resultados de la lógica moderna.
En el enfoque formalista es insostenible el programa de deducir toda la matemática enteramente de la lógica. Se infiere de este hecho que ningún sistema formal puede ser consistente y completo.
Finalmente. Si queremos certeza absoluta, entonces tenemos que conformarnos con un sistema muy simple tal como el cálculo proposicional, con un número finito de proposiciones. Sin embargo, si queremos razonamientos que permitan los conceptos de número y teoría de conjuntos, entonces tenemos que aceptar algún elemento de inseguridad y la posibilidad de encarar paradojas que podamos resolver a futuro, [13].

Conclusión.

La historia de la interacción de la matemática y la lógica han interactuado repetidamente a través de sus repetidos desarrollos. Cada vez que se ha producido una interacción ambas disciplinas se han beneficiado. Muchos problemas se han resuelto, pero la resolución de estos problemas han traído invariablemente otros que han tenido que ser atacados por lógicos y matemáticos. Finalmente la situación pueda describirse de la siguiente manera:
Si queremos certeza absoluta, entonces tendríamos que contentarnos con un sistema muy “simple” tal como el cálculo proposicional con un número finito de proposiciones. Sin embargo, si se introducen conceptos de número y teoría de conjuntos, entonces incorporamos elementos de inseguridad y la posibilidad de encarar nuevas paradojas que más adelante se puedan resolver.

Referencias:

1. Heat T. L., Greek Mathematics, Dover Publications Inc. New York, 1963.

2. Heat T. L., The thirteen Books of Euclid's Elements, Vol. I y II, Dover Publications Inc. New York, 1956.

3. Bonola R., Non – Euclidean Geometry, Dover, New -York, 1955.

4. Coxeter H.S., Non – Euclidean Geometry, University of Toronto, Toronto, 1965.

5. Eves H., An Introductions to the Foundations and Fundamental Concepts Mathematics, Holt, New –York, 1965.

6. Tarski A., Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas, Espasa, Madrid, 1968.

7. Townsend E., Hilbert D. The foundations of Geometry, Scholar Choise, 2015

8. Gödel K., The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of Set theory, Princeton, 1940.

9. Moore, E., On the projective axioms of geometry, transactions of the American Mathematical Society, Vol. 3 (1902), pag. 142-158.

10. Frege G., Conceptografia y los fundamentos de la Aritmética, UNAM, México, 1972.

11. Russell, B., Los principios de la Matemática, Espasa, Madrid, 1967.

12. Meda, M., El problema del infinito, Revista Matemática No. 6, Sociedad Matemática Mexicana, pag. 153-156.

13. Corner, S., Introducción a la filosofía de la Matemática, Siglo XXI, México,1974.