CALCULO DIFERENCIAL ABSOLUTO EN ESPACIOS EUCLIDIANOS

En los aledaños de la Relatividad General

Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) y un estudiante suyo, Tullio Levi-Civitta (1873-1941), fueron los pioneros en el desarrollo del calculo tensorial, que recibió el empuje definitivo al convertirse en la herramienta matemática clave que permitiría a Albert Einstein una exposición coherente de la Relatividad General, estableciendo la transformación de sistemas referenciales mediante diferenciación absoluta de magnitudes vectoriales y tensoriales.

Ambos publicaron en 1901 *El Cálculo diferencial absoluto (*"Méthodes de calcul diférentiel absolu et leurs applications", *Mathematische Annalen* 54, 125-201 (1901)*)*, su obra más famosa, que está hoy traducida a diversos idiomas y es uno de los textos clásicos de referencia del cálculo tensorial, más de un siglo después de su primera publicación.

01. INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS EUCLIDIANOS

01.1. Definición de espacio euclidiano real:

Un espacio afín, o puntual, real n-dimensional, que podemos denotar por ε_n, es una terna $\varepsilon_n = (\varepsilon, V_n(R), f)$ en donde ε es un conjunto cuyos elementos llamaremos *puntos del espacio afin*, $V_n(R)$ es un espacio real n-dimensional y f es una aplicación del conjunto producto $\varepsilon x \varepsilon$ *en* $V_n(R)$ que cumple las condiciones:

- $\forall A \in \varepsilon, \forall \vec{x} \in V_n(R), \exists \dot{B} \in \varepsilon / f(A,B) = \vec{x}$
- $\forall A,B,C \in \varepsilon,\ f(A,C) = f(A,B) + F(B,C)$
- $f(A,B) = \vec{0} \Rightarrow A = B$

Si el espacio vectorial asociado $V_n(R)$ es unidimensional, el espacio puntual afín asociado se denomina Recta Afín.

Si el espacio vectorial asociado $V_n(R)$ es bidimensional, el espacio puntual afín asociado se denomina Plano Afín.

Si el espacio vectorial asociado $V_n(R)$ es tridimensional, el espacio puntual afín asociado se denomina Espacio Afín Tridimensional.

Un espacio vectorial $V_n(R)$ es euclidiano si esta dotado de un producto interior, esto es, de una aplicación $p_i : V_n(R) x V_n(R) \to R$ que verifica las condiciones cinco condiciones siguientes.

a) Propiedad de conmutatividad:

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in V_n(R),\ p_i(\vec{x}, \vec{y}) = p_i(\vec{y}, \vec{x})$$

b) Propiedad de distributividad respecto a la suma:

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in V_n(R),\ p_i(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = p_i(\vec{x}, \vec{y}) + p_i(\vec{x}, \vec{z})$$

c) Propiedad de asociatividad mixta:

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in V_n(R), \forall \alpha \in R,\ p_i(\vec{x}, \vec{y}) = p_i(\vec{y}, \alpha\vec{x}) = p_i(\alpha\vec{y}, \vec{x}) = \alpha p_i(\vec{y}, \vec{x})$$

d) Propiedad de definición positiva:

$$\forall \vec{x} \in V_n(R),\ p_i(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$$

e) Propiedad de no degeneración:

$$Si\ p_i(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

Un Espacio Puntual Euclidiano n dimensional es un espacio afín asociado a un espacio vectorial euclidiano n dimensional.

Por simplicidad representaremos con un paréntesis al producto interior de dos vectores: $(\vec{x}, \vec{y})$ significa "producto interior de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$".

01.2. Sistemas de referencia:

Un sistema de referencia afín está constituido por un punto del espacio puntual euclidiano, que se llama origen del sistema de referencia, y una base del espacio vectorial asociad $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\} = \{\vec{e}_i\}_n$.

Sistema de referencia de origen en el punto O: $(o; \{\vec{e}_i\}_n)$

Se llama vector de posición de un punto X del espacio con respecto al sistema de referencia $(o; \{\vec{e}_i\}_n)$, al vector $\vec{x}$ de origen el origen O del sistema y extremo el punto X:

$$OX = \vec{x} = x^1.\vec{e}_1 + ... + x^n.\vec{e}_n = x^i \vec{e}_i$$

los números $x^1,...,x^n$ son las *coordenadas* del vector $\vec{x}$ en la base $\{\vec{e}_i\}_n$.

Tres propiedades inmediatas:

a) $\forall X \in \varepsilon, OX = -XO$

b) $\forall X, Y \in \varepsilon, OX = OY + YX$

c) Si $OX = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Para cada punto del espacio ε_n existe un conjunto distinto de n números reales, $x^1,...,x^n$, que son las n coordenadas del punto con respecto a un sistema referencial fijo dado $(o; \{\vec{e}_i\}_n)$. Tal conjunto se denominan *coordenadas curvilíneas* del punto X en el sistema $(o; \{\vec{e}_i\}_n)$.

Cada punto X del espacio tiene, por consiguiente, un conjunto de n coordenadas curvilíneas diferente en cada sistema referencia $(o; \{\vec{e}_i\}_n)$. Las funciones $x^i = x^i(x'^k)$ que ligan a dos conjuntos de coordenadas del mismo punto X en dos sistemas referenciales distintos $(o; \{\vec{e}_i\}_n)$ y $(o; \{\vec{e}'_k\}_n)$ del mismo origen, se denominan *relaciones de Jacobi.*

Al variar el punto X en el tiempo, varía también el conjunto $x^1,...,x^n$ de sus coordenadas en un sistema referencial dado $(o; \{\vec{e}_i\}_n)$. La ley de variación puede ser empírica o bien puede ser una función matemática de un parámetro t. Supondremos en lo que sigue que las funciones $x^i = x^i(t)$ que expresan la variación de las coordenadas de un punto X en el tiempo son funciones siempre diferenciables.

El campo vectorial definido por t es el conjunto de los puntos de ε_n que definen el campo de existencia de las funciones $x^i = x^i(t)$.

Un elemento diferencial de vector OX expresado en el sistema referencial fijo $(o; \{\vec{e}_i\}_n)$ es el vector cuyas coordenadas en dicho sistema son las diferenciales de las funciones coordenadas de OX en tal sistema referencial.

$$dOX = d\vec{x} = dx^1\vec{e}_1 + ... + dx^n\vec{e}_n = dx^i\vec{e}_i$$

01.3. Producto interior de vectores. Matriz de Gramm:

Producto interior:

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{x} = dx^i\vec{e}_i \\ d\vec{x} = dx^j\vec{e}_j \end{array}\right\} \Rightarrow (d\vec{x}, d\vec{y}) = dx^i dx^j (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = dx^i dx^j g_{ij}$$

es decir, en forma diferencial, se tiene que $(d\vec{x}, d\vec{y}) = dx^i dx^j g_{ij}$

en forma integral, será: $(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i x^j$

la matriz $(g_{ij})_n = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$ se llama Matriz de Gramm en la base $\{\vec{e}_k\}_n$

Módulo y norma:

En forma integral: $|\vec{x}| = |(\vec{x}, \vec{x})| = +\sqrt{g_{ij} x^i x^j}$ $\quad N(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 = g_{ij} x^i x^j$

En forma diferencial: $|d\vec{x}| = |(d\vec{x}, d\vec{x})| = +\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$ $\quad N(d\vec{x}) = |d\vec{x}|^2 = g_{ij} dx^i dx^j$

Componentes contravariantes y covariantes de un vector en una base:

Si es $\vec{x} = x^k\vec{e}_k$, se dice que los escalares x^k son las *componentes contravariantes* del vector $\vec{x}$ en la base $\{\vec{e}_k\}_n$. Los productos internos $x_k = (\vec{x}, \vec{e}_k)$ se llaman *componentes covariantes* del vector $\vec{x}$ en la base $\{\vec{e}_k\}_n$.

Relación entre las componentes covariantes y contravariantes:

$$x_k = (\vec{x}, \vec{e}_k) = (x^j\vec{e}_j, \vec{e}_k) = x^j(\vec{e}_j, \vec{e}_k) = x^j g_{jk}$$

por tanto: $x_k = x^j g_{jk}$, o bien: $x^j = x_k.g^{jk}$ *((g^{jk}) matriz inversa de (g_{jk})).*

El producto interior se puede expresar, usando componentes covariantes, por:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x^i x^k g_{ik} = x_h g^{hi} x_k g^{jk} g_{ik} = x_h x_k g^{hk} = x_h x^h$$

Puntos infinitamente próximos:

Dos puntos, x_1 y x_2, son infinitamente próximos si definen un vector diferencial, es decir, si el vector que va de un punto a otro es infinitesimal: $x_1 x_2 = d\vec{x} = dx^k\vec{e}_k$.

Elemento diferencial de longitud:

Es la distancia entre dos puntos infinitamente próximos:

$$ds = d(x_1, x_2) = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = |d\vec{x}| = +\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

Derivada y diferencial del producto interior:

Veamos la derivada respecto al tiempo t:

$$\frac{d}{dt}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{d}{dt} g_{ij} x^i y^j = g_{ij} \frac{dx^i}{dt} y^j + g_{ij} x^i \frac{dy^j}{dt} = \left(\frac{d\vec{x}}{dt}, \vec{y} \right) + \left(\vec{x}, \frac{d\vec{y}}{dt} \right)$$

Análogamente obtenemos la diferencial total: $d(\vec{x}, \vec{y}) = (d\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, d\vec{y})$

Y la diferencial parcial: $\frac{\partial}{\partial x'^k}(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial x'^k}, \vec{y} \right) + \left(\vec{x}, \frac{\partial \vec{y}}{\partial x'^k} \right)$

Ejemplo:

La matriz de Gramm en una cierta base $\{\vec{e}_k\}_3$ de un espacio euclidiano tridimensional es

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz inversa de la matriz de Gramm.
b) Encontrar las componentes covariantes del vector $\vec{x}$ cuyas componentes contravariantes vienen dadas por $(x^1, x^2, x^3) = (3,5,1)$.
c) Encontrar las componentes contravariantes del vector $\vec{y}$ cuyas componentes covariantes son $(y_1, y_2, y_3) = (29,9,6)$.
d) Hallar el producto interior de ambos vectores, $\vec{x}$ e $\vec{y}$, usando las componentes contravariantes.
e) Hallar el producto interior de ambos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, usando las componentes covariantes.
f) Hallar el producto interior de ambos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, usando el producto de las componentes contravariantes por las componentes covariantes.

Resolución:

a) $$(g^{ik}) = \frac{1}{g}\left[(g_{ik})^t\right]^+ = -\frac{1}{28}\begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ -5 & -3 & 7 \\ -7 & 7 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{28} & \frac{5}{28} & \frac{7}{28} \\ \frac{5}{28} & \frac{3}{28} & -\frac{7}{28} \\ \frac{7}{28} & -\frac{7}{28} & \frac{7}{28} \end{pmatrix}$$

b) $x_k = x^i g_{ik} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (3,5,1)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (20,18,2)$

c) $y^k = y_i g^{ik} \Rightarrow (y^1, y^2, y^3) = (29,9,6)\begin{pmatrix} -\frac{1}{28} & \frac{5}{28} & \frac{7}{28} \\ \frac{5}{28} & \frac{3}{28} & -\frac{7}{28} \\ \frac{7}{28} & -\frac{7}{28} & \frac{7}{28} \end{pmatrix} = (2,5,7)$

d) $(\vec{x}, \vec{y}) = x^i y^k g_{ik} \Rightarrow (3,5,1)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 144$

e) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_i y_k g^{ik} \Rightarrow (20,18,2)\begin{pmatrix} -\frac{1}{28} & \frac{5}{28} & \frac{7}{28} \\ \frac{5}{28} & \frac{3}{28} & -\frac{7}{28} \\ \frac{7}{28} & -\frac{7}{28} & \frac{7}{28} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 29 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = 144$

f) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_i y^i = x^k y_k \Rightarrow \begin{cases} (3,5,1).\begin{pmatrix} 29 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = 144 \\ (2,5,7).\begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix} = 144 \end{cases}$

01.4. Cambio de base del sistema de referencia:

Cambio de la base en un sistema de referencia puntual:

Dados dos sistemas de referencia fijos con un mismo origen $(O, \{\vec{e}_k\}_n)$, $(O, \{\vec{e}_i^{\,'}\}_n)$ encontremos la matriz de paso de una base a la otra:

Sea un vector expresado en ambas bases: $\left.\begin{array}{l} \vec{x} = x^k \vec{e}_k \\ \vec{x} = x'^i \vec{e}_i^{\,'} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d\vec{x} = dx^k \vec{e}_k \\ d\vec{x} = dx'^i \vec{e}_i^{\,'} \end{array}\right\}$

Se tiene, por tanto, que: $d\vec{x} = dx^k \vec{e}_k = \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i} dx'^i \vec{e}_k = dx'^i \vec{e}_i$, por lo cual, al identificar, se tiene:

$$\vec{e}_i^{\,'} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \vec{e}_k$$

La matriz $J_n = \left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\right)_n$ se llama *Matriz de Jacobi* del cambio de base.

Ejemplo de cambio de base en el sistema tridimensional:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,'} \\ \vec{e}_2^{\,'} \\ \vec{e}_3^{\,'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{'1}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{'1}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{'1}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{'2}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{'2}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{'2}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{'3}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{'3}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{'3}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

Esto nos indica que fijado el sistema referencial $\left(\vec{O}, \{\vec{e}'_k\}_n\right)$, para cada vector $\vec{x}$ expresado en dicho sistema, puede definirse una nueva base por

$$\left\{\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right).\vec{e}_i\right\}_n$$

Y cuando el punto origen se toma como el mismo vector $\vec{x}$, entonces el sistema referencial

$$\left(\vec{x}, \left\{\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right).\vec{e}_i\right\}_n\right)$$

se denomina *Sistema natural de referencia en* $\vec{x}$, con relación a la base $\left(\vec{O}, \{\vec{e}'_k\}_n\right)$.

Ejemplo de determinación de la matriz de Jacobi para el caso de un vector $\vec{x}$, que expresado en las bases $\{\vec{e}'_k\}_n$ y $\{\vec{e}_i\}_n$ es:

$$\vec{x} = x'^k \, \vec{e}'_k = x^i \vec{e}_i$$

estando las componentes contravariantes en ambas bases sujetas a las relaciones:

$$\begin{aligned} x^1 &= 7x'^1 + x'^3 \\ x^2 &= x'^2 \\ x^3 &= 2x'^3 + 5x'^1 + x'^2 \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\right) = 7, \quad \left(\frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial x^3}{\partial x'^1}\right) = 5,$$
$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\right) = 1, \quad \left(\frac{\partial x^3}{\partial x'^2}\right) = 1,$$
$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^3}\right) = 1, \quad \left(\frac{\partial x^2}{\partial x'^3}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial x^3}{\partial x'^3}\right) = 2,$$

por tanto:

$$J\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de determinación de la relación entre las componentes contravariantes de un vector cuando se conoce la matriz de Jacobi de la transformación:

Este ejemplo es el inverso del anterior. Usemos los mismos datos. Dados dos sistemas de referencia fijos con un mismo origen $\left(O,\{\vec{e}_k\}_n\right)$, $\left(O,\{\vec{e}\,'_i\}_n\right)$, sea:

$$\vec{x} = x'^k\,\vec{e}\,'_k = x^i\vec{e}_i \Rightarrow x'^k.A^i_k.\vec{e}_i = x^i\vec{e}_i \Rightarrow x^i = x'^k.A^i_k$$

por tanto, $(x^1,x^2,x^3) = (x'^1,x'^2,x'^3).\begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = & 7x'^1 + x'^3 \\ x^2 = & x'^2 \\ x^3 = & 2x'^3 + 5x'^1 + x'^2 \end{cases}$

Fijado un sistema natural de referencia en $\vec{x}$, se tiene que si varía el vector $\vec{x}$ también variará el sistema de referencia natural. La expresión matemática de esta variación para un cambio infinitesimal del vector $\vec{x}$ se denomina *Transformación de Christoffel.*

$$\left(\vec{x},\{\vec{e}_i\}_n\right) \rightarrow \left(\vec{x}+d\vec{x};\{\vec{e}_i+d\vec{e}_i\}_n\right)$$

01.5. La transformación de Christoffel:

Como ya se ha indicado antes, se puede definir para cada punto X del espacio puntual euclidiano, con vector de posición $\vec{x}$, un sistema de referencia de origen en X y base cuyos vectores dependan de las coordenadas de $\vec{x}$ en un sistema de referencia fijo.

Sistema natural en X: $\left(\vec{x}(x^r),\{\vec{e}_k(x^r)\}_n\right)$

Al variar las coordenadas del punto X varía obviamente el punto origen del sistema y también los vectores de la base:

$$\left(\vec{x},\{\vec{e}_i\}_n\right) \rightarrow \left(\vec{x}+d\vec{x};\{\vec{e}_i+d\vec{e}_i\}_n\right)$$

$$d\vec{x} = dx^i\vec{e}_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}dx'^k\vec{e}_i \qquad d\vec{e}_m = \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x'^k}dx'^k = \Gamma^i_{mk}\vec{e}_i.dx'^k$$

o sea:

$$d\vec{x} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{'k}} dx^{'k} \vec{e}_i$$
$$d\vec{e}_m = \Gamma^i_{mk} \vec{e}_i . dx^{'k}$$

Donde hemos llamado Γ^i_{mk} a las coordenadas del vector $\frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^{'k}}$ en la base $\{\vec{e}_i\}_n$. Tales símbolos se denominan *Símbolos de Christoffel de 2ª especie* o de 2ª clase, y tienen la propiedad de simetría respecto de los subíndices *k* y *m* $(\Gamma^i_{mk} = \Gamma^i_{km})$.

En resumen, la transformación del sistema natural $\left(\vec{X}; \{\vec{e}_i\}_n\right)$ cuando se produce una variación infinitesimal de $\vec{X}$ es

$$\left(\vec{x}; \{\vec{e}_i\}_n\right) = \left(x^i \vec{e}_i; \{\vec{e}_i\}_n\right) \rightarrow \left(\left(x^i + \frac{\partial x^i}{\partial x^{'k}} dx^{'k}\right)\vec{e}_i; \left\{\vec{e}_i + \Gamma^m_{ik} dx^{'k} \vec{e}_m\right\}_n\right)$$

(Transformación de Christoffel)

La transformación de Christoffel en función de la métrica del espacio:

Sea $G=(g_{ij})_n$ la matriz métrica de Gramm respecto de la base $\{\vec{e}_i\}_n$, $g_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$. Su derivación parcial nos da:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^m} = \frac{\partial}{\partial x'^m}\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = \left(\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x'^m}, \vec{e}_j\right) + \left(\vec{e}_i, \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x'^m}\right) = \left(\Gamma^h_{im}\vec{e}_h, \vec{e}_j\right) + \left(\vec{e}_i, \Gamma^k_{jm}\vec{e}_k\right) = \Gamma^h_{im} g_{hj} + \Gamma^k_{jm} g_{ik}$$

o sea:

$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^m} = \Gamma^h_{im} g_{hj} + \Gamma^k_{jm} g_{ik}$, o bien, por ser *G* matriz simétrica: $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^m} = \Gamma^h_{im} g_{jh} + \Gamma^k_{jm} g_{ik}$

llamando $(im, j) = \Gamma^h_{im} g_{jh}$, $(jm, i) = \Gamma^k_{jm} g_{ik}$, $\partial_m g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^m}$ se puede escribir:

$$\partial_m g_{ij} = (im, j) + (jm, i)$$

(Identidad de Ricci)

Los símbolos (im, j) se denominan *símbolos de Christoffel de 1ª especie o de 1ª clase.*

Variando los subíndices en esta identidad, se tiene:

$$\partial_m g_{ij} = (im, j) + (jm, i)$$
$$\partial_i g_{mj} = (mi, j) + (ji, m)$$
$$\partial_j g_{im} = (ij, m) + (mj, i)$$

y de aquí, se tiene que: $(im, j) = \partial_i g_{mj} + \partial_m g_{ij} - \partial_j g_{im}$.

Esto nos permite escribir la transformación de Christoffel en función de los símbolos de primera especie, o bien, en función de la métrica del espacio:

$$\left(\vec{x};\{\vec{e}_i\}_n\right)=\left(x^i\vec{e}_i;\{\vec{e}_i\}_n\right)\rightarrow\left(\left(x^i+\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}dx'^k\right)\vec{e}_i;\left\{\vec{e}_i+(ik,j).g^{im}.dx'^k\vec{e}_m\right\}_n\right)$$

$$\left(\vec{x};\{\vec{e}_i\}_n\right)=\left(x^i\vec{e}_i;\{\vec{e}_i\}_n\right)\rightarrow\left(\left(x^i+\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}dx'^k\right)\vec{e}_i;\left\{\vec{e}_i+(\partial_i g_{kj}+\partial_i g_{ij}-\partial_j g_{ik}).g^{im}.dx'^k\vec{e}_m\right\}_n\right)$$

01.6 Carácter tensorial de los símbolos que aparecen en la transformación de Christoffell:

Puesto que las relaciones tensoriales se verifican siempre, independientemente del sistema de coordenadas elegido, resulta útil establecer el carácter tensorial de las magnitudes que utilizamos. En particular resulta conveniente establecer si son o no tensores los símbolos que aparecen en la transformación, a saber la matriz de Gramm, el símbolo de 2ª especie de Christoffel y el símbolo de 1ª especie de Christoffel.

Podemos identificar el carácter tensorial de una magnitud de varios índices por la forma en que varía en un cambio del sistema de referencia. Así, si es A_k^i la matriz del cambio de base de $\{\vec{e}_i\}_n$ a $\{\vec{e}'_k\}_n$, y B_i^k la matriz del cambio de base de $\{\vec{e}'_k\}_n$ a $\{\vec{e}_i\}_n$:

$$\vec{e}'_k=A_k^i\vec{e}_i=\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\vec{e}_i,\quad k=1,\dots,n \qquad\qquad \vec{e}_i=B_i^k e'_k=\frac{\partial x'^k}{\partial x'^i}\vec{e}'_k,\ i=1,\dots,n$$

entonces, una magnitud *t* tendrá carácter tensorial si su expresión *t′* en el nuevo sistema de referencia $\{\vec{e}'_k\}_n$ viene relacionada con su expresión en el sistema $\{\vec{e}_i\}_n$ por la relación

$$t'^{i1\dots iq}_{j1\dots jp}=A^{k1}_{j1}\dots A^{kp}_{jp}.B^{i1}_{h1}\dots B^{iq}_{hq}.t^{h1\dots hq}_{k1\dots kp}$$

Donde las A_k^i y B_i^k son las matrices indicadas antes.

Tal tensor t se diría que es de orden covariante *p* y de orden contravariante *q*.

- Carácter tensorial de la matriz de Gramm:

Sea

$$(\vec{x},\vec{y})=\left(x'^i\vec{e}'_i,y'^j\vec{e}'_j\right)=\left(\vec{e}'_i,\vec{e}'_j\right)x'^i y'^j=g'_{ij}x'^i y'^j$$

En un cambio de base:

$$(\vec{x},\vec{y})=\left(x'^i\vec{e}'_i,y'^j\vec{e}'_j\right)=\left(A_i^k\vec{e}_k,A_j^h\vec{e}_h\right)x'^i y'^j=A_i^k A_j^h g_{kh}x'^i y'^j$$

Por tanto, al identificar:

$$g'_{ij}\, x'^i\, y'^j = A_i^k A_j^h g_{kh} x'^i\, y'^j \Rightarrow g'_{ij} = A_i^k A_j^h g_{kh}$$

En definitiva:

$$\boxed{g'_{ij} = A_i^k A_j^h g_{kh}}$$

Lo que nos indica que se trata de un tensor 2-covariante (o tensor covariante de orden 2)

- Carácter tensorial del símbolo de Christoffel de 2ª especie:

$$\Gamma'^r_{pq}.\vec{e}'_r = \frac{\partial \vec{e}'_p}{\partial x'^q} = \frac{\partial}{\partial x'^q}\left(A_p^k \vec{e}_k\right) = \frac{\partial A_p^k}{\partial x'^q}\vec{e}_k + A_p^k \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x'^q} = \frac{\partial A_p^k}{\partial x'^q}\vec{e}_k + A_p^k \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial x'^q} =$$
$$= \frac{\partial A_p^k}{\partial x'^q}\vec{e}_k + A_p^k A_q^s \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^s} = \frac{\partial A_p^k}{\partial x'^q}\vec{e}_k + A_p^k A_q^s \Gamma^u_{ks}\vec{e}_u = \frac{\partial A_p^k}{\partial x'^q}\vec{e}_k + A_p^k A_q^s \Gamma^u_{ks} B_u^r \vec{e}'_r$$

en definitiva:

$$\Gamma'^r_{pq}.\vec{e}'_r = \frac{\partial A_p^k}{\partial x'^q}\vec{e}_k + A_p^k A_q^s B_u^r \Gamma^u_{ks}\vec{e}'_r$$

por lo cual estos símbolos no tienen en general carácter tensorial. Solamente tendrían carácter de tensores si fuera nulo el primer sumando de la expresión anterior, o sea si:

$$\frac{\partial A_p^k}{\partial x'^q} = \frac{\partial}{\partial x'^q}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^p}\right) = 0$$

es decir, solo si las relaciones entre las coordenadas del cambio de base son lineales, entonces estos símbolos son tensores 2-covariante 1-contravariante:

$$\boxed{\Gamma^r_{pq} = A_p^k A_q^s B_u^r \Gamma^u_{ks}}$$

- Carácter tensorial del símbolo de Christoffel de 1ª especie:

Puesto que es $(im, j) = \Gamma^h_{im} g_{jh}$, tales símbolos serán tensores si se verifica la condición antes indicada de linealidad de las relaciones entre las coordenadas que definen el cambio de base.

02. DIFERENCIACIÓN ABSOLUTA

02.1. Definición. Derivación covariante absoluta:

Dado un sistema natural de referencia $(\vec{x},\vec{e}_k) \equiv \left(\vec{x}; \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\vec{e}_i \right\}_n \right)$, si, cuando el sistema sufre la transformación de Christoffel, expresamos la variación diferencial del vector $\vec{x}$ en función de los vectores de la base $\{\vec{e}_k\}_n$:

$$d\vec{x} = Dx^k.\vec{e}_k$$

Diremos que las componentes Dx^k del vector $d\vec{x}$ en dicha base son las diferenciales absolutas de las componentes contravariantes del vector.

Análogamente, si consideramos las componentes covariantes del vector $\vec{x}$, dadas por $x_k = (\vec{x},\vec{e}_k)$ y expresamos la diferencial del vector en la base dada por sus componentes covariantes:

$$d\vec{x} = Dx_i.\vec{e}_i$$

diremos que las componentes Dx_i del vector $d\vec{x}$ en dicha base son las diferenciales absolutas de sus componentes covariantes.

- Obtención de la diferencial absoluta de las componentes contravariantes:

$$d\vec{x} = d(x^k\vec{e}_k) = dx^k.\vec{e}_k + x^k d\vec{e}_k = dx^k.\vec{e}_k + x^k \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x'^j} dx'^j = dx^k.\vec{e}_k + x^k \Gamma^r_{kj} dx'^j\, \vec{e}_r$$

por tanto, se puede escribir: $d\vec{x} = dx^r.\vec{e}_r + x^k\Gamma^r_{kj}dx'^j\,\vec{e}_r = \left(dx^r + x^k\Gamma^r_{kj}dx'^j\right)\vec{e}_r = Dx^r.\vec{e}_r$

y obtenemos, finalmente:

$$\boxed{Dx^r = dx^r + x^k.\Gamma^r_{kj}.dx'^j}$$

- Obtención de la diferencial absoluta de las componentes covariantes:

$$Dx_k = (d\vec{x},\vec{e}_k) = d(\vec{x},\vec{e}_k) - (\vec{x},d\vec{e}_k) = dx_k - \left(\vec{x}, \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x'^j} dx'^j\right) = dx_k - \left(\vec{x},\Gamma^r_{kj}dx'^j\,\vec{e}_r\right) = dx_k - \Gamma^r_{kj}dx'^j\,(\vec{x},\vec{e}_r)$$

O sea:

$$\boxed{Dx_k = dx_k - x_r.\Gamma^r_{kj}.dx'^j}$$

Derivación covariante absoluta:

- De las componentes contravariantes:

$$d\vec{x} = Dx^r.\vec{e}_r = dx^r.\vec{e}_r + x^k\Gamma^r_{kj}dx'^j\,\vec{e}_r = \left(dx^r + x^k\Gamma^r_{kj}dx'^j\right).\vec{e}_r = \left(\frac{\partial x^r}{\partial x'^j}dx'^j + x^k\Gamma^r_{kj}dx'^j\right).\vec{e}_r =$$

$$= \left(\frac{\partial x^r}{\partial x'^j} + x^k\Gamma^r_{kj}\right).dx'^j\,\vec{e}_r = D_jx^r.dx'^j\,\vec{e}_r$$

Por tanto: $Dx^r = D_jx^r.dx^j$. Llamaremos Derivada Covariante Absoluta de las componentes contravariantes del vector a la expresión:

$$\boxed{D_jx^r = \frac{\partial x^r}{\partial x'^j} + x^k\Gamma^r_{kj}}$$

- De las componentes covariantes:

$$d\vec{x} = Dx_k.\vec{e}_k = dx_k.\vec{e}_k - x_r\Gamma^r_{kj}dx'^j\,\vec{e}_r = \left(dx_k - x_r\Gamma^r_{kj}dx'^j\right).\vec{e}_r = \left(\frac{\partial x_k}{\partial x'^j}dx'^j - x_r\Gamma^r_{kj}dx'^j\right).\vec{e}_r =$$

$$= \left(\frac{\partial x_k}{\partial x'^j} - x_r\Gamma^r_{kj}\right).dx'^j\,\vec{e}_r = D_jx_k.dx'^j\,\vec{e}_r$$

Y se tiene, de forma análoga: $Dx_k = D_jx_k.dx'^j$. Se llama entonces, Derivada Covariante Absoluta de las componentes covariantes de un vector a la expresión:

$$\boxed{D_jx_k = \frac{\partial x_k}{\partial x'^j} - x_r\Gamma^r_{kj}}$$

Algunas expresiones con diferenciales absolutas:

El producto interior:

$$(d\vec{x}, d\vec{y}) = \left(Dx^k\vec{e}_k, Dy^j\vec{e}_j\right) = Dx^kDy^j(\vec{e}_k, \vec{e}_j) = Dx^kDy^jg_{kj}$$

$$\left(d\vec{x}, d\vec{y}\right) = Dx^kDy^jg_{kj} = \left(dx^k + x^s.\Gamma^k_{sp}.dx^p\right)\left(dy^j + y^r.\Gamma^j_{rq}.dy^q\right)g_{kj}$$

Módulo:

$$\left|d\vec{x}\right| = +\sqrt{Dx^kDx^jg_{kj}} = \sqrt{\left(dx^k + x^s.\Gamma^k_{sp}.dx^p\right)\left(dx^j + x^r.\Gamma^j_{rq}.dx^q\right)g_{kj}}$$

02.2. Derivación covariante absoluta de expresiones tensoriales. El procedimiento del Campo Uniforme.

Para derivar un tensor de cualquier orden es muy útil el llamado *procedimiento del campo uniforme* que consiste en multiplicar el tensor por las componentes de un campo vectorial cuyas diferenciales absolutas sean nulas, lo cual simplificaría las expresiones de derivación del indicado producto. Mediante identificación es posible eliminar finalmente el campo uniforme utilizado como método auxiliar y despejar la derivada absoluta buscada.

Supongamos que queremos derivar el tensor $t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$ .Construimos una función ϕ :

$$\phi = u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_p} v^{\beta_1}\ldots v^{\beta_q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$$

donde las $u_{\alpha_1},\ldots,u_{\alpha_p}$ y las $v^{\beta_1},\ldots,v^{\beta_q}$ verifican que la diferencial absoluta es nula:

$$Du_{\alpha_1} = \ldots = Du_{\alpha_p} = Dv^{\beta_1} = \ldots = Dv^{\beta_q} = 0$$

Es decir:

$$\begin{aligned} Du_k &= du_k - u_s\Gamma^s_{kj}du^j = 0 \Rightarrow du_k = u_s\Gamma^s_{kj}du^j \\ Dv^h &= dv^h + v^p\Gamma^h_{pj}dv^j = 0 \Rightarrow dv^h = -v^p\Gamma^h_{pj}dv^j \end{aligned} \qquad [1]$$

esto nos permite diferenciar la función ϕ :

$$d\phi = D\left(u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_p} v^{\beta_1}\ldots v^{\beta_q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\right) = D\left(u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_p} v^{\beta_1}\ldots v^{\beta_q}\right) t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} + u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_p} v^{\beta_1}\ldots v^{\beta_q} Dt^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} =$$
$$= u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_p} v^{\beta_1}\ldots v^{\beta_q} Dt^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$$

Es decir, tenemos, por una parte que

$$d\phi = u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_p} v^{\beta_1}\ldots v^{\beta_q} Dt^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$$

Si por otra parte podemos despejar también $d\phi$ usando las expresiones [1] de la forma siguiente, aun conteniendo algunos parámetros, par1, par2, ...:

$$d\phi = u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_p} v^{\beta_1}\ldots v^{\beta_q} f(t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}, par1, par2,\ldots)$$

podemos ahora identificar:

$$d\phi = u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_p} v^{\beta_1}\ldots v^{\beta_q} Dt^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} = u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_p} v^{\beta_1}\ldots v^{\beta_q} f(t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}, par1, par2,\ldots)$$

y de aquí, despejar la diferencial absoluta buscada para el tensor:

$$Dt^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} = f(t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}, par1, par2,\ldots)$$

02.3. Ejemplos de uso del procedimiento del campo uniforme:

02.3.1. Derivada absoluta covariante de un tensor de primer orden covariante:

Supongamos un campo uniforme de componentes $u^k(x^s)$, k=1,...n, s=1,...n. Se tiene:

$$\phi = u^k v_k$$
$$d\phi = u^k Dv_k$$

por ser $u^k(x^s)$ uniforme, es $Du^k = du^k + u^i \Gamma_{ij}^k dx^j = 0 \Rightarrow du^k = -u^i \Gamma_{ij}^k dx^j$

por tanto, al diferenciar la función auxiliar ϕ se tiene:

$$d\phi = du^k v_k + u^k dv_k = \left(-u^i \Gamma_{ij}^k dx^j\right) v_k + u^k dv_k = -u^p v_q \Gamma_{pj}^q dx^j + u^p dv_p = u^p \left(dv_p - v_q \Gamma_{pj}^q dx^j\right)$$

y al identificar: $d\phi = u^p Dv_p = u^p \left(dv_p - v_q \Gamma_{pj}^q dx^j\right) \Rightarrow Dv_p = dv_p - v_q \Gamma_{pj}^q dx^j$

y la derivada covariante absoluta es:

$$\boxed{D_j v_p = \partial_j v_p - v_q \Gamma_{pj}^q}$$

02.3.2. Derivada absoluta covariante de un tensor de primer orden contravariante:

Supongamos ahora un campo uniforme de componentes $u_k(x^s)$, k=1,...n, s=1,...n. Se tiene:

$$\phi = u_k v^k$$
$$d\phi = u_k Dv^k$$

por ser $u_k(x^s)$ uniforme, es $Du_k = du_k - u_i \Gamma_{kj}^i dx^j = 0 \Rightarrow du_k = u_i \Gamma_{kj}^i dx^j$

diferenciamos la función auxiliar ϕ:

$$d\phi = du_k v^k + u_k dv^k = \left(u_i \Gamma_{kj}^i dx^j\right) v^k + u_k dv^k = u_p v^q \Gamma_{qj}^p dx^j + u_p dv^p$$

y al identificar: $d\phi = u_p Dv^p = u^p \left(dv^p + v^q \Gamma_{qj}^p dx^j\right) \Rightarrow Dv^p = dv^p + v^q \Gamma_{qj}^p dx^j$

y la derivada covariante absoluta es:

$$\boxed{D_j v^p = \partial_j v^p + v^q \Gamma_{qj}^p}$$

02.3.3. Derivada absoluta covariante de un tensor de segundo orden contra-variante:

Consideraremos los campos uniformes $u_k(x^s), v_k(x^s)$ k=1,...,n, s=1,...,n. Se tiene:

$$\phi = u_i v_j t^{ij}$$
$$d\phi = u_i v_j Dt^{ij}$$

por ser $u_k(x^s), v_k(x^s)$ uniformes, es $du_k = u_i \Gamma^i_{kj} dx^j$, $dv_k = v_i \Gamma^i_{kj} dx^j$

diferenciamos la función auxiliar ϕ:

$$d\phi = u_i v_j dt^{ij} + u_i dv_j t^{ij} + du_i v_j t^{ij} = u_i v_j dt^{ij} + u_i \left(v_r \Gamma^r_{jk} dx^k\right) t^{ij} + \left(u_r \Gamma^r_{ik} dx^k\right) v_j t^{ij} =$$
$$= u_i v_j dt^{ij} + u_i v_r \Gamma^r_{jk} dx^k t^{ij} + u_r v_j \Gamma^r_{ik} dx^k t^{ij} = u_p v_q dt^{pq} + u_p v_q t^{pj} \Gamma^q_{jk} dx^k + u_p v_q t^{iq} \Gamma^p_{ik} dx^k =$$
$$= u_p v_q \left(dt^{pq} + t^{pj} \Gamma^q_{jk} dx^k + t^{iq} \Gamma^p_{ik} dx^k\right)$$

identificamos:

$$u_p v_q Dt^{pq} = u_p v_q \left(dt^{pq} + t^{pj} \Gamma^q_{jk} dx^k + t^{iq} \Gamma^p_{ik} dx^k\right) \Rightarrow Dt^{pq} = dt^{pq} + t^{pj} \Gamma^q_{jk} dx^k + t^{iq} \Gamma^p_{ik} dx^k$$

y la derivada covariante absoluta es:

$$\boxed{D_k t^{pq} = \partial_k t^{pq} + t^{pj} \Gamma^q_{jk} + t^{iq} \Gamma^p_{ik}}$$

02.3.4. Derivada absoluta covariante de un tensor de segundo orden covariante:

Consideraremos ahora los campos uniformes $u^k(x^s), v^k(x^s)$ k=1,...,n, s=1,...,n. Se tiene:

$$\phi = u^i v^j t_{ij}$$
$$d\phi = u^i v^j Dt_{ij}$$

por ser $u^k(x^s), v^k(x^s)$ uniformes, es $du^k = -u^i \Gamma^k_{ij} dx^j$, $dv^k = -v^i \Gamma^k_{ij} dx^j$

diferenciamos la función auxiliar ϕ:

$$d\phi = u^i v^j dt_{ij} + u^i dv^j t_{ij} + du_i v_j t_{ij} = u^i v^j dt_{ij} + u^i \left(-v^h \Gamma^j_{hk} dx^k\right) t_{ij} + \left(-u^h \Gamma^i_{hk} dx^k\right) v^j t_{ij} =$$
$$= u^i v^j dt_{ij} - u^i v^h \Gamma^j_{hk} dx^k t_{ij} - u^h v^j \Gamma^i_{hk} dx^k t_{ij} = u^p v^q dt_{pq} - u^p v^q \Gamma^s_{qk} dx^k t_{ps} - u^p v^q \Gamma^s_{pk} dx^k t_{sq} =$$
$$= u^p v^q \left(dt_{pq} - \Gamma^s_{qk} dx^k t_{ps} - \Gamma^s_{pk} dx^k t_{sq}\right)$$

identificamos:

$$u^p v^q Dt_{pq} = u^p v^q \left(dt_{pq} - t_{ps} \Gamma^s_{qk} dx^k - t_{sq} \Gamma^s_{pk} dx^k\right) \Rightarrow Dt_{pq} = dt_{pq} - t_{ps} \Gamma^s_{qk} dx^k - t_{sq} \Gamma^s_{pk} dx^k$$

y la derivada covariante absoluta es:

$$\boxed{D_k t_{pq} = \partial_k t_{pq} - t_{ps} \Gamma^s_{qk} - t_{sq} \Gamma^s_{pk}}$$

02.3.5. Derivada absoluta covariante de un tensor de segundo orden mixto:

Consideraremos ahora los campos uniformes $u^k(x^s), v_k(x^s)$ k=1,...,n, s=1,...,n. Se tiene:

$$\phi = u^i v_j t_i^j$$
$$d\phi = u^i v_j Dt_i^j$$

por ser $u^k(x^s), v_k(x^s)$ uniformes, es $du^k = -u^i \Gamma_{ij}^k dx^j$, $dv_k = v_i \Gamma_{kj}^i dx^j$

diferenciamos la función auxiliar ϕ:

$$\begin{aligned} d\phi &= u^i v_j dt_i^j + u^i dv_j t_i^j + du^i v_j t_i^j = u^i v_j dt_i^j + u^i \left(v_s \Gamma_{jk}^s dx^k\right) t_{ij} + \left(-u^h \Gamma_{hk}^i dx^k\right) v_j t_i^j = \\ &= u^i v_j dt_i^j + u^i v_s \Gamma_{jk}^s dx^k t_i^j - u^h v_j \Gamma_{hk}^i dx^k t_i^j = u^p v_q dt_p^q + u^p v_q \Gamma_{jk}^q dx^k t_p^j - u^p v_q \Gamma_{pk}^s dx^k t_s^q = \\ &= u^p v_q \left(dt_p^q + t_p^j \Gamma_{jk}^q dx^k - t_s^q \Gamma_{pk}^s dx^k\right) \end{aligned}$$

identificamos:

$$u^p v^q Dt_p^q = u^p v_q \left(dt_p^q + t_p^j \Gamma_{jk}^q dx^k - t_s^q \Gamma_{pk}^s dx^k\right) \Rightarrow Dt_p^q = dt_p^q + t_p^j \Gamma_{jk}^q dx^k - t_s^q \Gamma_{pk}^s dx^k$$

y la derivada covariante absoluta es:

$$\boxed{D_k t_p^q = \partial_k t_p^q + t_p^j \Gamma_{jk}^q - t_s^q \Gamma_{pk}^s}$$

02.4. El Teorema de Ricci:

La derivada covariante absoluta del tensor de Gramm es nula:

$$D_k g_{ij} = 0$$

En efecto:

Basta aplicar la regla de derivación covariante absoluta de un tensor de segundo orden covariante y, a continuación, la Identidad de Ricci:

$$D_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{is} \Gamma_{jk}^s - g_{sj} \Gamma_{ik}^s = \partial_k g_{ij} - (jk,i) - (ik,j)$$

Y como por la Identidad de Ricci es $\partial_k g_{ij} = (jk,i) + (ik,j)$, se deduce de inmediato que $D_k g_{ij} = 0$.

02.5. Una expresión para el símbolo reducido de Christoffel de 2ª especie en función del determinante de la matriz de Gramm:

El Símbolo de 2ª especie de Christoffel reducido, esto es con el índice superior coincidiendo con uno de los índices inferiores, se puede expresar en función del determinante de la matriz métrica de Gramm mediante la siguiente relación:

$$\Gamma_{ki}^{i} = \partial_k L\sqrt{g}$$

(L es el logaritmo neperiano)

En efecto:

Veámoslo en detalle para el caso de un espacio de dos dimensiones:

$$g = \left|g_{ij}\right| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$$

Se tiene, llamando G_{ij} al adjunto del elemento g_{ij}:

$$\partial_k g = g_{11}\partial_k g_{22} + g_{22}\partial_k g_{11} - g_{21}\partial_k g_{12} - g_{12}\partial_k g_{21} = G_{11}\partial_k g_{22} + G_{22}\partial_k g_{11} + G_{21}\partial_k g_{12} + G_{12}\partial_k g_{21} =$$

$= G_{ij}\partial_k g_{ij} = g.g^{ij}\partial_k g_{ij}$, donde es g^{ij} la matriz inversa de la matriz de Gramm.

Teniendo en cuenta la expresión de la derivada $\partial_k g_{ij} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x'^k} = \Gamma_{ik}^{h} g_{hj} + \Gamma_{jk}^{m} g_{im}$ (figura en la página 9):

$$\partial_k g = g.g^{ij}\partial_k g_{ij} = g.g^{ij}\left(\Gamma_{ik}^{h} g_{hj} + \Gamma_{jk}^{m} g_{im}\right) \equiv g.g^{ij}\left(\Gamma_{ik}^{i} g_{ij} + \Gamma_{jk}^{j} g_{ij}\right) = g.g^{ij} g_{ij}\left(\Gamma_{ik}^{i} + \Gamma_{jk}^{j}\right)$$

o sea:

$$\partial_k g = g.\left(\Gamma_{ik}^{i} + \Gamma_{jk}^{j}\right) = g.\left(\Gamma_{ik}^{i} + \Gamma_{ik}^{i}\right) = 2.g.\Gamma_{ik}^{i}$$

obteniéndose finalmente: $\Gamma_{ik}^{i} = \dfrac{1}{2g}\partial_k g = \dfrac{1}{2}\partial_k Lg = \partial_k L\sqrt{g}$

Para espacios euclidianos de mayor número de dimensiones la expresión se generaliza sin dificultad.

02.6. Derivación covariante absoluta de 2º orden. El Teorema de Riemann-Christoffel.

Se define la derivada covariante absoluta de segundo orden como la derivada covariante absoluta del tensor derivada covariante absoluta:

$$D_{jk} t_{r_1 \ldots r_q}^{h_1 \ldots h_p} = D_j\left(D_k t_{r_1 \ldots r_q}^{h_1 \ldots h_p}\right)$$

Es importante obtener la derivada covariante absoluta de segundo orden del tensor de primer orden contravariante en un espacio cualquiera, pues permite definir el concepto de curvatura mediante la diferencia entre ambas derivadas absolutas de segundo orden:

$$D_{jk}v^m - D_{kj}v^m = R^m_{s,jk}v^s$$

Se denomina en general *curvatura del espacio* al tensor de cuatro índices $R^m_{s,jk}$ al cual se da también el nombre de Tensor de Riemann-Christoffel.

El tensor de Riemann-Christoffel será idénticamente nulo si $D_{jk}v^m = D_{kj}v^m$. Es decir, en los espacios en donde permute el orden de la derivación covariante absoluta de segundo orden la curvatura del espacio será nula.

Veremos en lo que sigue que en un espacio euclidiano real se anula el Tensor de Riemann-Christoffel, y por tanto, la curvatura en estos espacios es nula, por permutar en ellos la derivación covariante absoluta de segundo orden (Teorema de Riemann-Christoffel).

- Expresión general de la derivada covariante absoluta de 2º orden del tensor de primer orden contravariante:

$$D_{jp}v^q = D_j\left(D_p v^q\right) = D_j t^q_p \text{ (habiendo llamado } t^q_p = D_p v^q\text{)}$$

$$D_{jp}v^q = D_j t^q_p = \partial_j t^q_p + t^m_p\Gamma^q_{mj} - t^q_m\Gamma^m_{pj} = \partial_j\left(\partial_p v^q + v^h\Gamma^q_{hp}\right) + \left(\partial_p v^m + v^h\Gamma^m_{hp}\right)\Gamma^q_{mj} - \left(\partial_m v^q + v^r\Gamma^q_{rm}\right)\Gamma^m_{pj} =$$
$$= \partial_{jp}v^q + \partial_j v^h\Gamma^q_{hp} + v^h\partial_j\Gamma^q_{hp} + \partial_p v^m\Gamma^q_{mj} + v^h\Gamma^m_{hp}\Gamma^q_{mj} - \partial_m v^q\Gamma^m_{pj} - v^r\Gamma^q_{rm}\Gamma^m_{pj} =$$
$$= \left[\partial_j\Gamma^q_{hp} + \Gamma^m_{hp}\Gamma^q_{mj}\right]v^h + \left[\partial_{jp}v^q + \partial_j v^h\Gamma^q_{hp} + \partial_p v^m\Gamma^q_{mj} - \partial_m v^q\Gamma^m_{pj} + v^r\Gamma^q_{rm}\Gamma^m_{pj}\right] =$$
$$= \left[\partial_j\Gamma^q_{hp} + \Gamma^m_{hp}\Gamma^q_{mj}\right]v^h + \Phi_{jp}$$

Donde se ha llamado $\Phi_{jp} = \partial_{jp}v^q + \partial_j v^h\Gamma^q_{hp} + \partial_p v^m\Gamma^q_{mj} - \partial_m v^q\Gamma^m_{pj} + v^r\Gamma^q_{rm}\Gamma^m_{pj}$, que es un término simétrico respecto a los subíndices j y p, pues $\Phi_{jp} = \Phi_{pj}$

Por tanto, la expresión de la derivada covariante absoluta de segundo orden del tensor de primer orden contravariante, puede expresarse por

$$\boxed{D_{jp}v^q = \left[\partial_j\Gamma^q_{hp} + \Gamma^m_{hp}\Gamma^q_{mj}\right]v^h + \Phi_{jp}}$$

(Siendo $\Phi_{jp} = \partial_{jp}v^q + \partial_j v^h\Gamma^q_{hp} + \partial_p v^m\Gamma^q_{mj} - \partial_m v^q\Gamma^m_{pj} + v^r\Gamma^q_{rm}\Gamma^m_{pj}$)

- Expresión del Tensor de Riemann-Christoffel:

$$D_{jp}v^q - D_{pj}v^q = \left[\partial_j\Gamma^q_{hp} + \Gamma^m_{hp}\Gamma^q_{mj}\right]v^h + \Phi_{jp} - \left[\partial_p\Gamma^q_{hj} + \Gamma^m_{hj}\Gamma^q_{mp}\right]v^h - \Phi_{pj} =$$
$$= \left(\left[\partial_j\Gamma^q_{hp} + \Gamma^m_{hp}\Gamma^q_{mj}\right] - \left[\partial_p\Gamma^q_{hj} + \Gamma^m_{hj}\Gamma^q_{mp}\right]\right)v^h = \left(\partial_j\Gamma^q_{hp} - \partial_p\Gamma^q_{hj} + \Gamma^m_{hp}\Gamma^q_{mj} - \Gamma^m_{hj}\Gamma^q_{mp}\right)v^h$$

identificando con

$$D_{jp}v^q - D_{pj}v^q = R^q_{h,jp}v^h$$

se tiene, finalmente:

$$\boxed{R^q_{h,jp} = \partial_j \Gamma^q_{hp} - \partial_p \Gamma^q_{hj} + \Gamma^m_{hp}\Gamma^q_{mj} - \Gamma^m_{hj}\Gamma^q_{mp}}$$

- El Teorema de Riemann-Christoffel:

Si en un espacio vectorial es válido el Teorema de Schwartz de la doble derivación parcial de sus vectores, esto es, si

$$\partial_{jp}\vec{x} = \partial_{pj}\vec{x}$$

Entonces el tensor de cuatro índices de Riemann es cero y la curvatura del espacio es nula.

En efecto:

$$\partial_{jp}\vec{e}_h = \partial_{pj}\vec{e}_h \Rightarrow \partial_j\left(\partial_p \vec{e}_h\right) = \partial_p\left(\partial_j \vec{e}_h\right) \Rightarrow \partial_j\left(\Gamma^s_{ph}\vec{e}_s\right) = \partial_p\left(\Gamma^s_{jh}\vec{e}_s\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_j \Gamma^s_{ph}.\vec{e}_s + \Gamma^s_{ph}.\partial_j \vec{e}_s = \partial_p \Gamma^s_{jh}.\vec{e}_s + \Gamma^s_{jh}.\partial_p \vec{e}_s \Rightarrow \partial_j \Gamma^q_{ph}.\vec{e}_q + \Gamma^s_{ph}.\Gamma^q_{js}\vec{e}_q = \partial_p \Gamma^q_{jh}.\vec{e}_q + \Gamma^s_{jh}.\Gamma^q_{ps}\vec{e}_q$$

Por tanto:

$$\partial_j \Gamma^q_{ph} + \Gamma^s_{ph}.\Gamma^q_{js} = \partial_p \Gamma^q_{jh} + \Gamma^s_{jh}.\Gamma^q_{ps}$$

y de aquí:

$$R^q_{h,jp} = \partial_j \Gamma^q_{hp} - \partial_p \Gamma^q_{hj} + \Gamma^s_{hp}\Gamma^q_{sj} - \Gamma^s_{hj}\Gamma^q_{sp} = 0$$

Como corolario podemos afirmar, por tanto, que en los espacios euclidianos, en los cuales es válido el teorema de Schwartz, se verifica que la curvatura es nula, y por consiguiente:

$$D_{jp}v^q - D_{pj}v^q = R^q_{h,jp}v^h = 0$$

lo que nos indica que es

$$D_{jp}v^q = D_{pj}v^q$$

es decir, el teorema de Schwartz también puede generalizarse a la derivación covariante absoluta en los espacios euclidianos.

03. PSEUDOTENSORES, OPERACIONES Y OPERADORES

03.1. Definición de pseudotensor:

La definición de pseudotensor se hace de manera análoga a la definición de un tensor.

Podemos establecer el carácter de pseudotensor de una magnitud de varios índices por la forma en que varía en un cambio del sistema de referencia. Así, si es A_k^i la matriz del cambio de base de $\{\vec{e}_i\}_n$ a $\{\vec{e}'_k\}_n$, y B_i^k la matriz del cambio de base de $\{\vec{e}'_k\}_n$ a $\{\vec{e}_i\}_n$:

$$\vec{e}'_k = A_k^i \vec{e}_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\vec{e}_i, \quad k = 1,...,n \qquad \vec{e}_i = B_i^k e'_k = \frac{\partial x'^k}{\partial x'^i}\vec{e}'_k, \; i = 1,...,n$$

entonces, una magnitud *t* tendrá carácter pseudotensorial de peso m si su expresión *t′* en el nuevo sistema de referencia $\{\vec{e}'_k\}_n$ viene relacionada con su expresión en el sistema $\{\vec{e}_i\}_n$ por la relación

$$t'^{i1...iq}_{j1...jp} = D^m.A^{k1}_{j1}...A^{kp}_{jp}.B^{i1}_{h1}...B^{iq}_{hq}.t^{h1...hq}_{k1...kp}$$

Donde es D el determinante de las matrices A_k^i y B_i^k del cambio de base ya indicadas antes, y m es un número real que se denomina *peso del pseudentensor.*

El pseudotensor t se diría que es covariante *p* y contravariante *q* y con peso m.

3.2. Producto de pseudotensores de opuesto peso:

El producto de dos pseudotensores de peso opuesto es un tensor cuyos ordenes de covarianza y contravarianza es suma de los respectivos ordenes de covarianza y contravarianza de los pseudetensores que se multiplican.

En efecto:

Supongamos los dos pseudotensores cuyo peso es opuesto:

$$\Omega'^{i1...iq}_{j1...jp} = D^m.A^{k1}_{j1}...A^{kp}_{jp}.B^{i1}_{h1}...B^{iq}_{hq}.\Omega^{h1...hq}_{k1...kp} \quad \text{y} \quad \Psi'^{f1...fu}_{s1...sv} = D^{-m}.A^{r1}_{s1}...A^{rv}_{sv}.B^{f1}_{g1}...B^{fu}_{gu}.\Psi^{g1...gv}_{r1...ru}$$

se tiene:

$$\Omega'^{i1...iq}_{j1...jp}\,\Psi'^{f1...fu}_{s1...sv} = D^m.D^{-m}.A^{k1}_{j1}...A^{kp}_{jp}.A^{r1}_{s1}...A^{rv}_{sv}.B^{i1}_{h1}...B^{iq}_{hq}.B^{f1}_{g1}...B^{fu}_{gu}.\Omega^{h1...hq}_{k1...kp}\Psi^{g1...gv}_{r1...ru}$$

en definitiva:

$$\Omega'^{i1...iq}_{j1...jp}\,\Psi'^{f1...fu}_{s1...sv} = .A^{l1}_{i1}...A^{l(p+v)}_{i(p+v)}.B^{t1}_{z1}...B^{t(q+u)}_{z(q+u)}.\Omega^{h1...hq}_{k1...kp}\Psi^{g1...gv}_{r1...ru}$$

que es un tensor (p+v)-covariante y (q+u)-contravariante.

3.3. El pseudotensor de Kronecker:

Es una magnitud que indistintamente puede definirse de forma contravariante o covariante, por la condición:

$$\mathrm{E}_{k_1 \ldots k_p} = \begin{cases} 0 & k_1 \ldots k_p \;\; no\ todos\ dist\operatorname{int}os \\ 1 & subindices\ en\ permutacion\ par \\ -1 & subíndices\ en\ permutacion\ impar \end{cases}$$

Esta magnitud podemos considerarla en general ligada a los términos del desarrollo de un determinante de orden p.

Así, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3} .E_{k_1k_2k_3} = a_{11}a_{22}a_{33}.E_{123} + a_{12}a_{23}a_{31}.E_{231} + a_{13}a_{21}a_{32}.E_{312} +$$

$$+ a_{13}a_{22}a_{31}.E_{321} + a_{12}a_{21}a_{33}.E_{213} + a_{11}a_{23}a_{32}.E_{132} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

En general se tiene, para el determinante D de la matriz de cambio de base:

$$D = \left| A_k^j \right| = a_{j_1k_1} \ldots a_{j_nk_n} .E_{k_1 \ldots k_n}$$

y por otra parte:

$$D = D.E'_{j_1 \ldots j_n}$$

por tanto, al igualar: $D.E'_{j_1 \ldots j_n} = a_{1k_1} \ldots a_{nk_n} .E_{k_1 \ldots k_n} \Rightarrow E'_{j_1 \ldots j_n} = D^{-1}.a_{j_1k_1} \ldots a_{j_nk_n} .E_{k_1 \ldots k_n}$

en general es, por tanto:

$$\boxed{E'_{j_1 \ldots j_n} = D^{-1}.A_{k_1}^{j_1} \ldots A_{k_n}^{j_n} .E_{k_1 \ldots k_n}}$$

3.4. El pseudotensor de Gramm:

Se trata del determinante *g* de la matriz de gramm, que, como veremos a continuación es un pseudotensor de peso 2 con orden nulo de covarianza y contravarianza.

$$g_{ik} = \left(\vec{e}_i , \vec{e}_k\right) = \left(A_i^p .\vec{e}\,'_p , A_k^q .\vec{e}\,'_q\right) = A_i^p A_k^q \left(\vec{e}\,'_p , \vec{e}\,'_q\right) = A_i^p A_k^q .g'_{pq}$$

Tomando determinantes:

$$\left| g_{ik} \right| = \left| A_i^p A_k^q .g'_{pq} \right| = \left| A_i^p \right| . \left| A_k^q \right| . \left| g'_{pq} \right| \Rightarrow g = D.D.g'$$

En definitiva:

$$\boxed{g = D^2 g'}$$

3.5. El tensor de Gramm-Kronecker:

Si multiplicamos el pseudotensor de Kronecker por la raiz cuadrada del pseudotensor de Gramm, se obtiene un tensor del mismo orden de varianza que el pseudotensor de Kronecker:

En efecto, pues al tratarse de dos pseudotensores de opuesto peso:

$$E'_{j_1 \dots j_n} = D^{-1}.A^{j_1}_{k_1} \dots A^{j_n}_{k_n}.E_{k_1 \dots k_n} \quad \text{y} \quad \sqrt{g'} = D\sqrt{g}$$

se tiene:

$$\boxed{\sqrt{g'}E'_{j_1 \dots j_n} = A^{j_1}_{k_1} \dots A^{j_n}_{k_n}.\sqrt{g}E_{k_1 \dots k_n}}$$

3.6. Definición de operaciones usando el tensor de Gramm-Kronecker:

Producto interior diádico:

Se acostumbra a llamar producto interior diádico $\vec{u} \oplus \vec{v}$ de dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$, a los productos cruzados de sus componentes contravariantes (o covariantes):

$$\boxed{d^{ij} = u^i v^j}$$

Producto exterior tensorial:

También se define el producto exterior tensorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ por la diferencia entre los productos diádicos conmutados de ambos vectores $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\boxed{s^{ij} = u^i v^j - v^j u^i}$$

Producto exterior vectorial:

El producto exterior vectorial se define usando el tensor de Gramm-Kronecker:

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{1}{g} u_i v_j \vec{e}_k . \sqrt{g} E^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} u_i v_j \vec{e}_k . E^{ijk}}$$

Ejemplo:

En el caso de un espacio euclidiano de tres dimensiones, será:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} u_i v_j \vec{e}_k . E^{ijk} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[u_1 v_2 \vec{e}_3 E^{123} + u_3 v_1 \vec{e}_2 E^{312} + u_2 v_3 \vec{e}_1 E^{231} + u_1 v_3 \vec{e}_2 E^{132} + u_2 v_1 \vec{e}_3 E^{213} + u_3 v_2 \vec{e}_1 E^{321} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[u_1 v_2 \vec{e}_3 + u_3 v_1 \vec{e}_2 + u_2 v_3 \vec{e}_1 - u_1 v_3 \vec{e}_2 - u_2 v_1 \vec{e}_3 - u_3 v_2 \vec{e}_1 \right]$$

por lo que en este caso tridimensional se acostumbra a representar –de manera poco apropiada, obviamente- mediante un determinante:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Producto mixto:

El producto interior mixto de tres vectores se define usando también el tensor de Gramm-Kronecker como el producto diádico de uno de ellos por el producto exterior vectorial de los otros dos:

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \frac{1}{g} u_i v_j w_k \sqrt{g} E^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} u_i v_j w_k E^{ijk}}$$

para el caso de tres dimensiones, se obtiene de inmediato en forma de determinante:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

3.7. Operadores diferenciales:

Mediante el uso del tensor de Gramm-Kronecker pueden definirse algunos de los operadores diferenciales clásicos en términos de derivación absoluta. Podemos expresarlos mediante sus componentes contravariantes o covariantes, recordando que

$$u^j = g^{jk}u_k, \quad u_k = g_{jk}u^j, \quad \vec{e}_j = g_{jk}\vec{e}_k^*, \quad \vec{e}_k^* = g^{jk}\vec{e}_j$$

Para la expresión de un vector $\vec{u}$ por sus componentes contravariantes y covariantes:

$$\vec{u} = u^j\vec{e}_j$$
$$\vec{u} = u_k\vec{e}_k^*$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\vec{e}_k, \qquad \vec{\nabla}\varphi = g_{jk}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\vec{e}_j^*$$

Divergencia:

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \left(\vec{D},\vec{v}\right) = g^{jk}D_j v_k, \qquad \vec{\nabla}\vec{v} = (\vec{D},\vec{v}) = g_{jk}D^j v^k$$

Teorema: La divergencia del vector $\vec{v} = v^j\vec{e}_j$ se expresa por $\vec{\nabla}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_j\left(v^j\sqrt{g}\right)$

En efecto:

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \left(\vec{D},\vec{v}\right) = g^{jk}D_j v_k = D_j g^{jk}v_k = D_j v^j = \partial_j v^j + v^s\Gamma_{sj}^j = \partial_j v^j + v^s\partial_s\left(L\sqrt{g}\right) =$$
$$= \partial_j v^j + \frac{v^s}{\sqrt{g}}\partial_s\left(\sqrt{g}\right) = \partial_j v^j + \frac{v^j}{\sqrt{g}}\partial_j\left(\sqrt{g}\right) = \frac{\partial_j v^j.\sqrt{g} + v^j.\partial_j\left(\sqrt{g}\right)}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_j\left(v^j\sqrt{g}\right)$$

si viene dado en forma covariante: $\vec{\nabla}\vec{v} = (\vec{D},\vec{v}) = g_{jk}D^j v^k = D_k v^k = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_k\left(v^k\sqrt{g}\right)$

Rotacional:

Se puede definir el rotacional usando el tensor de Gramm-Kronecker:

$$\vec{\nabla}x\vec{v} = \frac{1}{g}D_i v_j\vec{e}_k\sqrt{g}E^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}D_i v_j\vec{e}_k E^{ijk}$$

Para el caso de tres dimensiones puede expresarse nmemotecnicamente por

$$\vec{\nabla}x\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ D_1 & D_2 & D_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

Norma del gradiente:

$$\left|\vec{\nabla}\varphi\right|^2 = \left(\vec{\nabla}\varphi, \vec{\nabla}\varphi\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} g_{kj}$$

Laplaciana:

$$\vec{\nabla}^2\varphi = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\sqrt{g}\right)$$