CALCULO DIFERENCIAL ABSOLUTO EN ESPACIOS DE RIEMANN

En los aledaños de la Relatividad General

Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) y un estudiante suyo, Tullio Levi-Civitta (1873-1941), fueron los pioneros en el desarrollo del calculo tensorial, que recibió el empuje definitivo al convertirse en la herramienta matemática clave que permitiría a Albert Einstein una exposición coherente de la Relatividad General, estableciendo la transformación de sistemas referenciales mediante diferenciación absoluta de magnitudes vectoriales y tensoriales.

Ambos publicaron en 1901 *El Cálculo diferencial absoluto (*"Méthodes de calcul diférentiel absolu et leurs applications", *Mathematische Annalen* 54, 125-201 (1901)*)*, su obra más famosa, que está hoy traducida a diversos idiomas y es uno de los textos clásicos de referencia del cálculo tensorial, más de un siglo después de su primera publicación.

01. INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE RIEMANN

01.1. Definición de Espacio de Riemann:

El hecho de que se anule en los espacios euclidianos el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel nos permite pensar en la posibilidad de que pueden existir otros espacios, en general distintos a los euclidianos, en los que el antedicho tensor de curvatura no siempre sea nulo. Espacios que serían más generales que los euclidianos, esto es, espacios de los cuales los euclidianos corresponderían al caso particular en que $R^i_{n,hk} = 0$.

Estos espacios más generales serían los Espacios de Riemann.

Para definir, por consiguiente, un Espacio de Riemann, hemos de procurar que sus magnitudes y propiedades coincidan con las de los espacios euclidianos, inclusive en lo que respecta al tensor de curvatura. Así, se ha de cumplir la simetría e inversibilidad de la métrica y la expresión contravariante del elemento diferencial de longitud.

Un espacio de Riemann de n dimensiones es un par constituido por una variedad n-dimensional V_n y una métrica g_{ik}.

Una variedad n-dimensional V_n es un conjunto de n variables $x^1, \ldots, x^n$, que pueden representar longitudes, ángulos, etc., y que están definidas en correspondientes intervalos de números reales $I_1, \ldots, I_n$.

$$V_n = \{x^i / x^i \in I_i,\ i = 1,\ldots,n\}$$

$$(g_{ik})_n = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Espacio de Riemann: } R_n = (V_n, (g_{ik})_n)}$$

La métrica nos indica la forma de representación de la variedad n-dimensional, esto es, para cada métrica hay una forma de representación. La distancia entre dos puntos infinitamente próximos, o elemento diferencial de longitud, ds, podemos expresarla, como en los espacios euclidianos por:

$$|d\vec{x}|^2 = (d\vec{x}, d\vec{x}) = (dx^i\vec{e}_i, dx^k\vec{e}_k) = dx^i dx^k(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = g_{ik}dx^i dx^k$$

o sea

$$\boxed{ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k}$$

Esto es, en forma desarrollada, significa que

$$ds^2 = \left(dx^1,...,dx^n\right)\begin{pmatrix} g_{11} & ... & g_{1n} \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ g_{n1} & ... & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx^1 \\ ... \\ dx^n \end{pmatrix}$$

Cumpliéndose por lo demás que:

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{jk} = \left(g_{jk}\right)^{-1}, \; ds^2 = g_{jk}dx^j dx^k$$

Y los símbolos de Christoffel pueden definirse, de manera concordante con la expresión que tienen en los espacios euclidianos, por:

de primera especie: $$(ij,k) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

de segunda especie: $$\Gamma_{ij}^k = \left(ij,k\right).g^{kh}$$

Veremos que todos estos símbolos verifican en el Espacio de Riemann las mismas propiedades de simetría, tensorialidad, etc., que en los Espacios Euclidianos.

01.2. El ejemplo de las variedades bidimensionales de Riemann:

En el caso de las variedades bidimensionales, podemos definirlas simplemente por su métrica, esto es, por los elementos de la matriz métrica en cada punto de la variedad (generalmente son variables los elementos de este tensor en los puntos de un espacio de Riemann), o bien, podemos definirlas por su representación inmersa en una variedad euclidiana ordinaria tridimensional, y obtener su métrica desde la expresión del elemento diferencial de longitud en la variedad euclidiana:

Representación en la variedad euclidiana: $x^1 = x^1(x,y,z), \qquad x^2 = x^2(x,y,z)$

El. diferencial de longitud en la variedad euclidiana ordinaria: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

En el siguiente ejemplo definimos tres variedades bidimensionales de Riemann mediante su representación en una variedad euclidiana ordinaria tridimensional, la representación plana, la representación esférica y la representación cilíndrica.

Ejemplo:

Supongamos la variedad de dos dimensiones definida por

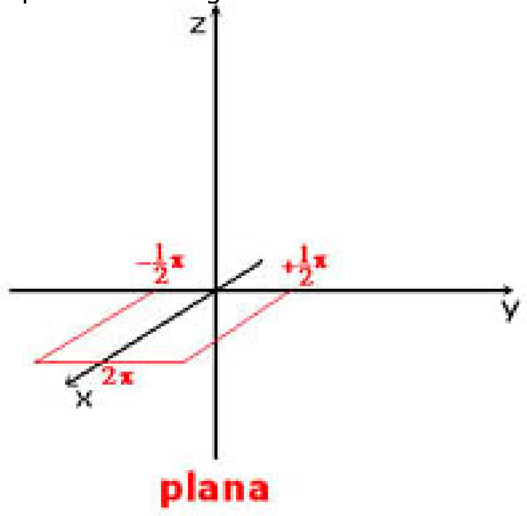
$$V_2 = \left\{x^1, x^2 / x^1 \in (0,2\pi) \subset R,\, x^2 \in (-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi) \subset R\right\}$$

o bien, si llamamos por comodidad u y v a las variables:

$$V_2 = \left\{ u, v / u \in (0, 2\pi) \subset R,\ v \in (-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi) \subset R \right\}$$

veamos las tres formas diferentes de representación de esta variedad, cada una de ellos con su correspondiente métrica g_{ik}:

a) Forma de representación plana. Es el caso en el que las dos variables representan longitudes:



$$u = x,\ v = y$$

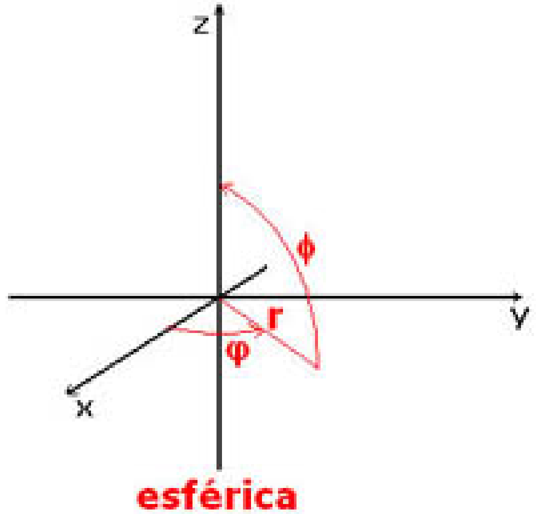
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + dv^2 + 0 =$$

$$= (du, dv) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

Métrica de la representación:

$$(g_{ik})_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Forma de representación esférica de radio r. Corresponde al caso en el que las variables representan ángulos:



$$x = r \cos\phi . \cos\varphi$$

$$y = r \cos\phi . sen\varphi$$

$$z = r sen\varphi$$

$$u = \varphi,\ v = \phi$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [d(r\cos\phi.\cos\varphi)]^2 +$$

$$+ [d(r\cos\phi . sen\varphi)]^2 + [d(rsen\phi)]^2 =$$

$$= r^2 sen^2\phi . d\phi^2 + r^2 \cos^2\phi . d\varphi^2 + r^2 \cos^2\phi d\phi^2 =$$

$$= r^2 \cos^2\phi . d\varphi^2 + r^2 d\phi^2 = r^2 \cos^2 v . du^2 + r^2 dv^2$$

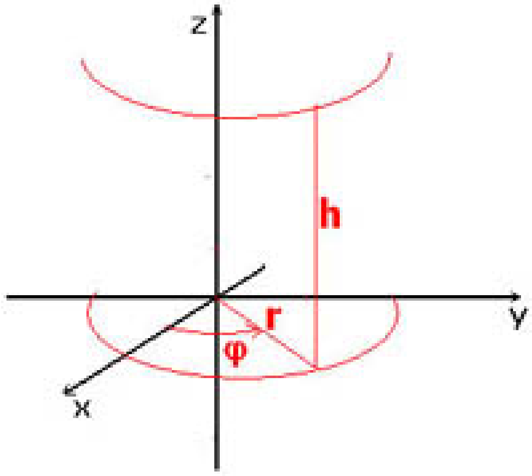
O sea:

$$ds^2 = (du, dv) \begin{pmatrix} r^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

Métrica de la representación:

$$(g_{ik})_2 = \begin{pmatrix} r^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

c) Forma de representación cilíndrica de radio r. Es el caso en el que una de las variables representa un ángulo y la otra una longitud:



cilíndrica

$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\cos\phi$$
$$z = h$$

$$u = \varphi,\ v = h$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [d(r\cos\varphi)]^2 +$$
$$+ [d(rsen\varphi)]^2 + [dh]^2 =$$
$$= r^2 sen^2\varphi.d\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi.d\varphi^2 + dh^2 =$$
$$= r^2 d\varphi^2 + dh^2 = r^2.du^2 + dv^2$$

O sea:

$$ds^2 = (du, dv)\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

Métrica de la representación:

$$(g_{ik})_2 = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

01.3. Las condiciones de definición de la métrica y símbolos de Christoffel:

Un espacio de Riemann, o variedad limitada de espacio de Riemann, es, en definitiva, un conjunto de variables definidas en intervalos reales, una variedad, junto con una métrica o representación. Esto nos indica que estos espacios son más generales que los espacios euclidianos, variando en general la métrica en cada uno de los puntos de la variedad, es decir, $g_{ik} = g_{ik}(x^r),\ r = 1,\ldots,n$

Puesto que pretendemos que estos espacios sean una generalización de los espacios euclidianos, hemos de exigirle a la métrica las condiciones de simetría e inversibilidad necesarias para ello.

Se cumplirán, por consiguiente, relaciones análogas a las de los espacios euclidianos:

1) Simetría y definición positiva de la métrica:

$$g_{ik} = g_{ki},\ g_{jj} > 0$$

2) Inversión de la métrica:

$$g^{jk} g_{ik} = \delta_{ij}$$

3) Relación entre las componentes covariantes y contravariantes de un vector:

$$v^k = g^{jk} v_j, \quad v_j = g_{jk} v^k$$

4) Producto interior:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = g_{jk} u^j v^k$$

5) Elemento diferencial de longitud:

$$ds^2 = g_{jk} du^j du^k = du_k du^k = g^{jk} du_k du_j$$

6) Símbolos de Christoffel de primera especie:

$$(ij,k) = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right)$$

7) Símbolos de Christoffel de segunda especie:

$$\Gamma_{ij}^k = (ij,h).g^{kh}$$

8) Tensor p-covariante, q-contravariante. Variación en los cambios de coordenadas:

$$t'^{i1...iq}_{j1...jp} = A^{k1}_{j1} ... A^{kp}_{jp} . B^{i1}_{h1} ... B^{iq}_{hq} . t^{h1...hq}_{k1...kp}$$

siendo:

$$\vec{e}'_k = A^i_k \vec{e}_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \vec{e}_i, \quad k = 1,...,n \qquad \vec{e}_i = B^k_i e'_k = \frac{\partial x'^k}{\partial x'^i} \vec{e}'_k, \quad i = 1,...,n$$

Veamos que definiendo estas magnitudes del modo expuesto, se verifican las mismas propiedades básicas para la métrica y símbolos de Christoffel que se verifican en un espacio euclidiano. Sin embargo, al variar la métrica en cada punto, varían también los símbolos que dependen de ella. Esto quiere decir que para un sistema de coordenadas dado, los símbolos de Christoffel que definamos varían en cada punto de la variedad.

Teorema:

Los símbolos de Christoffel son simétricos y solo tienen carácter tensorial si los cambios de variables o coordenadas en la variedad son lineales.

En efecto:

a) Para los símbolos de primera especie se verifica:

Simetría:

$$(ij,k) = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ji}\right) = (ji,k)$$

Comportamiento en los cambios de coordenadas:

$$\partial_s g'_{pq} = A_p^i A_q^j \partial_s g_{ij} + A_{ps}^i A_q^j g_{ij} + A_p^i A_{sq}^j g_{ij} = A_p^i A_q^j A_s^k \partial_k g_{ij} + A_{ps}^i A_q^j g_{ij} + A_p^i A_{sq}^j g_{ij}$$
$$\partial_p g'_{qs} = A_s^i A_q^j A_p^k \partial_k g_{ij} + A_{ps}^i A_q^j g_{ij} + A_s^i A_{pq}^j g_{ij} = A_s^k A_q^j A_p^i \partial_i g_{kj} + A_{ps}^i A_q^j g_{ij} + A_s^i A_{pq}^s g_{ij}$$
$$\partial_q g'_{ps} = A_p^i A_s^j A_q^k \partial_k g_{ij} + A_{pq}^i A_s^j g_{ij} + A_p^i A_{sq}^j g_{ij} = A_p^i A_q^j A_s^k \partial_j g_{ki} + A_{pq}^i A_s^j g_{ij} + A_p^i A_{sq}^j g_{ij}$$

$$(pq,s)' = \frac{1}{2}\left(\partial g'_{qs} + \partial g'_{ps} - \partial g'_{pq}\right) = \frac{1}{2} A_p^i A_s^k A_q^j .\left(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right) + \frac{1}{2} 2 A_{pq}^i A_s^j g_{ij} =$$
$$= A_p^i A_s^k A_q^j .(ij,k) + A_{pq}^i A_s^j g_{ij}$$

En definitiva:

$$\boxed{(pq,s)' = A_p^i A_q^j A_s^k .(ij,k) + A_{pq}^i A_s^j g_{ij}}$$

Por tanto, si es $A_{pq}^i = 0$, esto es, si los cambios de coordenadas son lineales, entonces el símbolo de Christoffel de primera especie es un tensor covariante de orden 3 (tensor 3-covariante)

b) Para los símbolos de segunda especie:

Simetría:

$$\Gamma_{ij}^k = (ij,s).g^{ks} = (ji,s).g^{ks} = \Gamma_{ji}^k$$

Comportamiento en los cambios de coordenadas:

$$\Gamma'^r_{pq} = (pq,s)'.g'^{rs} = A_p^i A_q^j A_s^k (ij,k) B_k^r B_h^s g^{kh} + A_{pq}^i A_s^j g_{ij} g^{kh} B_k^r B_h^s =$$
$$= A_p^i A_q^j B_h^r (ij,k) g^{kh} + A_{pq}^i B_k^r = A_p^i A_q^j B_h^r \Gamma_{ij}^h + A_{pq}^k B_k^r$$

(puesto que $A_s^k B_k^r = \delta_{rs}$, $A_s^j B_h^s = \delta_{jh} \Rightarrow g_{ij}.g^{kh} = g_{ih} g^{kh} = \delta_{ik}$)

y queda finalmente:

$$\boxed{\Gamma'^r_{pq} = A_p^i A_q^j B_h^r \Gamma_{ij}^h + A_{pq}^k B_k^r}$$

[01.3_1]

Esto nos indica que si es $A_{pq}^i = 0$, esto es, si los cambios de coordenadas son lineales, entonces el símbolo de Christoffel de segunda especie es un tensor 2-covariante y 1-contravariante.

Teorema:

Para los símbolos de primera y segunda especie de Christoffel se verifican, respectivamente, las identidades de Ricci y Christoffel.

En efecto:

a) La Identidad de Ricci:

$$(ij,k)+(ik,j)=\partial_i g_{kj}$$

En efecto:

$$(ij,k)+(ik,j)=\frac{1}{2}(\partial_i g_{jk}+\partial_j g_{ik}-\partial_k g_{ij})+\frac{1}{2}(\partial_i g_{kj}+\partial_k g_{ij}-\partial_j g_{ik})=\frac{1}{2}\partial_i g_{jk}+\frac{1}{2}\partial_i g_{kj}=\partial_i g_{jk}$$

b) La Identidad de Christoffel:

$$A^k_{pq}=A^k_r\Gamma'^r_{pq}-A^i_pA^j_q\Gamma^k_{ij}$$

En efecto:

Partiendo de la relación obtenida antes $\Gamma'^r_{pq}=A^i_pA^j_qB^r_h\Gamma^h_{ij}+A^k_{pq}B^r_k$, se tiene, al multiplicar ambos miembros por A^k_r:

$$\Gamma'^r_{pq}A^k_r=A^i_pA^j_qB^r_hA^k_r\Gamma^h_{ij}+A^k_{pq}B^r_kA^k_r$$

y queda:

$$\Gamma'^r_{pq}A^k_r=A^i_pA^j_q\delta_{hk}\Gamma^h_{ij}+A^k_{pq}\delta_{hk}=A^i_pA^j_q\Gamma^k_{ij}+A^k_{pq}\Rightarrow A^k_{pq}=\Gamma'^r_{pq}A^k_r-A^i_pA^j_q\Gamma^k_{ij}$$

Teorema:

Las transformaciones de variables $x^k(x'^r)$ que transforman una métrica de coeficientes constantes en otra métrica también de coeficientes constantes han de ser lineales:

$$x^k(x'^r)=Fx'^r+G,\quad F,G\ cons\tan tes$$

En efecto:

$$g_{ik}=cte\Rightarrow\partial_j g_{ik}=\partial_k g_{ij}=\partial_i g_{jk}=0\Rightarrow(ij,k)=0\Rightarrow\Gamma^k_{ij}=0$$

de la identidad de Christoffel, tenemos que:

$$A^k_{pq}=A^k_r\Gamma'^r_{pq}-A^i_pA^j_q\Gamma^k_{ij}=0\Rightarrow A^k_{pq}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial q}A^k_p=0\Rightarrow A^k_p=cte=F$$

O sea:

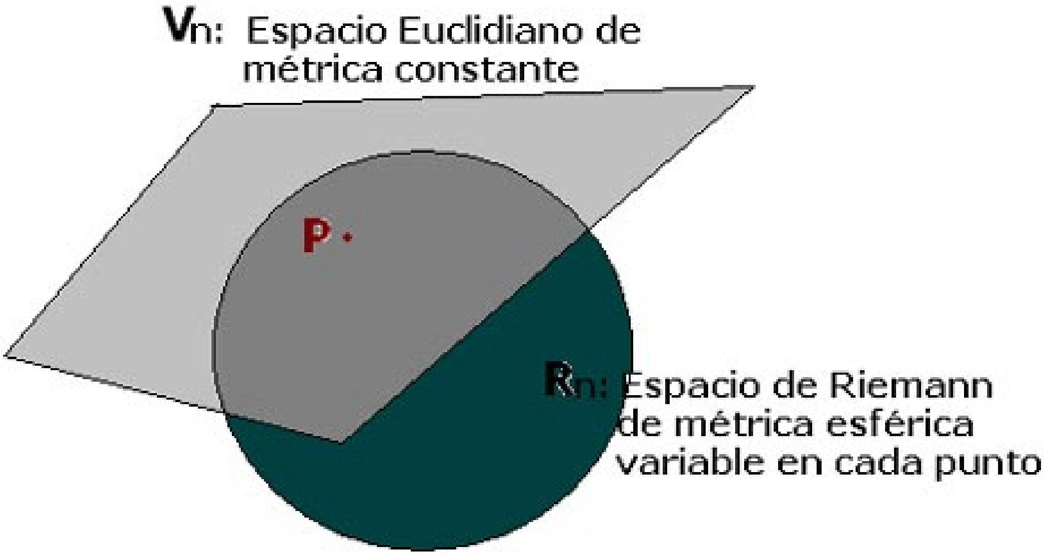
$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^p}=F\Rightarrow x^k=F.x'^r+G$$

01.3. Espacios tangentes:

Para un espacio de Riemann $R_n=(V_n,(g_{ik})_n)$, sabemos que la métrica varía en cada punto de la variedad. Si consideramos el valor de la métrica $\lfloor(g_{ij})_n\rfloor_0$ en un punto $P_0(y^k)$ dado, llamaremos Espacio Euclidiano Tangente en el punto $P_0(y^k)$, al espacio euclidiano cuya métrica es $\lfloor(g_{ij})_n\rfloor_0$.

Así, por ejemplo, el Espacio Euclidiano Tangente a una Variedad bidimensional de métrica esférica en un punto $P_0(y_0^k),\ \ k=1,2$ es el plano euclidiano de métrica constante dada por

$$(g_{ij})_2 = \begin{pmatrix} r^2\cos^2(y_0^2) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$



Plano euclidano tangente a una variedad esférica

En general dos espacios $R_n(1)$ y $R_n(2)$ se dicen tangentes en un punto dado P si pertenece a ambos espacios y las métricas de los dos espacios coinciden en dicho punto:

$$(g_{ij})_n^{(1)} = (g_{ij})_n^{(2)}$$

Dos espacios tangentes se dicen *osculadores en el punto P* si se verifica que

$$\partial_k g_{ij}^{(1)} = \partial_k g_{ij}^{(2)}$$

02. **DERIVACIÓN ABSOLUTA COVARIANTE EN LAS VARIEDADES DE RIEMANN**

02.1. Derivada covariante de una función escalar:

Sea una variedad V(y^k), de variables y^k, k=1,...,n, y métrica $(g_{ik})_n$. Consideremos la función escalar U=U(y^k). Derivando con respecto a las n variables se obtienen n funciones escalares:

$$U_k = \frac{\partial U}{\partial y^k} = \partial_k U \qquad (k = 1,...,n)$$

en un cambio de coordenadas de la forma $y^k=y^k(y'^r)$ se verifica que

$$U_p^{'} = \frac{\partial U}{\partial y'^p} = \frac{\partial U}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial y'^p} = A_p^k U_k$$

puesto que $U_p^{'} = A_p^k . U_k$, las *n* funciones U^k resultan ser las componentes covariantes de un vector que podemos denominar *vector derivada covariante del escalar U.*

02.2. Derivada covariante de un vector dado en la forma contravariante:

Si las $v^i=v^i(y^k)$, i=1,...,n, representan las componentes contravariantes de un vector, se tiene que, en un cambio de coordenadas $y^k=y^k(y'^r)$:

$$v^i = A_r^i v'^r \Rightarrow \frac{\partial v^i}{\partial y^k} = \frac{\partial}{\partial y^k}\left(A_r^i v'^r\right) = \frac{\partial}{\partial y'^p}\left(A_r^i v'^r\right)\frac{\partial y'^p}{\partial y^k} = \left(A_{rp}^i v'^r + A_r^i \partial_p^{'} v'^r\right)B_k^p$$

o sea:

$$\partial_k v^i = A_{rp}^i B_k^p v'^r + A_r^i B_k^p \partial_p^{'} v'^r \qquad [02.2\_1]$$

que no es un cambio tensorial debido al primero de los sumandos de la expresión. Para este sumando podemos utilizar la identidad de Christoffel:

$$A_{rp}^i = A_a^i \Gamma'^a_{rp} - A_r^m A_p^n \Gamma_{mn}^i$$

y al sustituir en el primer sumando queda asi:

$$A_{rp}^i B_k^p v'^r = A_a^i B_k^p \Gamma'^a_{rp} v'^r - A_r^m A_p^n B_k^p \Gamma_{mn}^i v'^r = A_a^i B_k^p \Gamma'^a_{rp} v'^r - A_r^m \delta_n^k \Gamma_{mn}^i v'^r =$$
$$= A_a^i B_k^p \Gamma'^a_{rp} v'^r - A_r^m \Gamma_{mk}^i v'^r = A_a^i B_k^p \Gamma'^a_{rp} v'^r - \Gamma_{mk}^i v^m$$

por lo cual, la derivada covariante [02.2_1] resulta:

$$\partial_k v^i = A_a^i B_k^p \Gamma'^a_{rp} v'^r - \Gamma_{mk}^i v^m + A_r^i B_k^p \partial_p^{'} v'^r$$

y reordenando con respecto a las coordenadas:

$$\partial_k v^i + \Gamma_{mk}^i v^m = A_a^i B_k^p \left(\partial_p^{'} v'^a + \Gamma'^a_{rp} v'^r\right)$$

si llamamos $D_k v^i = \partial_k v^i + v^m \Gamma^i_{mk}$, tenemos:

$$D_k v^i = A^i_r . B^p_k . D'_p v'^r$$

que es la derivada covariante absoluta del vector de componentes contravariantes $v^i=v^i(y^k)$, i=1,...,n, y presenta, por tanto, carácter tensorial. Se trata de un tensor de segundo orden mixto (1-covariante, 1-contravariante).

02.3. Derivada covariante de un vector dado en la forma covariante:

Si llamamos $v_i=v_i(y^k)$, i=1,...,n, a las componentes covariantes de un vector y repetimos los pasos anteriores obtenemos de forma análoga la expresión de la derivada absoluta covariante, que aquí es de la forma

$$D_k v_i = \partial_k v_i - v_m \Gamma^m_{ki}$$

Cumpliéndose la relación tensorial:

$$D_k v_i = B^p_i B^r_k D'_p v'_r$$

Por lo que se trata de un tensor de segundo orden covariante.

02.4. Derivada covariante de un tensor 2-covariante:

Sea el tensor 2-covariante expresado en un cambio de coordenadas por $t'_{rs} = A^i_r A^j_s t_{ij}$. Se tiene:

$$\partial'_p t'_{rs} = \frac{\partial (A^i_r A^j_s)}{\partial y'^p} . t_{ij} + A^i_r A^j_s . \frac{\partial t_{ij}}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial y'^p} = \left(A^i_{rp} A^j_s + A^i_r A^j_{sp} \right) t_{ij} + A^i_r A^j_s . A^k_p \partial_k t_{ij} \qquad [02.4\_1]$$

Utilizamos la Identidad de Christoffel:

$$A^i_{rp} = A^i_a \Gamma'^a_{rp} - A^m_r A^n_p \Gamma^i_{mn} \Rightarrow A^i_{rp} A^j_s = A^i_a A^j_s \Gamma'^a_{rp} - A^m_r A^n_p A^j_s \Gamma^i_{mn} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^i_{rp} A^j_s t_{ij} = \Gamma'^a_{rp} t'_{as} - A^m_r A^n_p A^j_s \Gamma^i_{mn} t_{ij}$$

también:

$$A^j_{sp} A^i_r t_{ij} = \Gamma'^a_{sp} t'_{ar} - A^m_s A^n_p A^j_r \Gamma^i_{mn} t_{ij}$$

Sustituyendo en la expresión [02.4_1] de la derivada:

$$\partial'_p t'_{rs} = \Gamma'^a_{rp} t'_{as} + \Gamma'^a_{sp} t'_{ar} + A^i_r A^j_s A^k_p \partial_k t_{ij} - A^m_r A^n_p A^j_s \Gamma^i_{mn} t_{ij} - A^m_s A^n_p A^j_r \Gamma^i_{mn} t_{ij}$$

ordenando:

$$\partial'_p t'_{rs} - \Gamma'^a_{rp} t'_{as} - \Gamma'^a_{sp} t'_{ar} = A^i_r A^j_s A^k_p \partial_k t_{ij} - A^m_r A^n_p A^j_s \Gamma^i_{mn} t_{ij} - A^m_s A^n_p A^j_r \Gamma^i_{mn} t_{ij}$$

o bien:

$$\partial'_p t'_{rs} - \Gamma'^a_{rp} t'_{as} - \Gamma'^a_{sp} t'_{ar} = A^i_r A^j_s A^k_p \left(\partial_k t_{ij} - \Gamma^b_{ik} t_{bj} - \Gamma^b_{jk} t_{bi}\right)$$

usando la notación $D_k t_{ij} = \partial_k t_{ij} - \Gamma^b_{ik} t_{bj} - \Gamma^b_{jk} t_{bi}$

se tiene en definitiva que $D'_p t'_{rs} = A^i_r A^j_s A^k_p D_k t_{ij}$, por lo que la derivada absoluta resulta ser un tensor 3-covariante.

En definitiva, la derivada absoluta buscada es

$$D_k t_{ij} = \partial_k t_{ij} - \Gamma^b_{ik} t_{bj} - \Gamma^b_{jk} t_{bi}$$

02.5. Derivación covariante de otras magnitudes tensoriales:

Siguiendo idéntico procedimiento encontramos la derivada covariante de un tensor de cualquier orden. En particular se tiene, por ejemplo, que en el caso de un tensor de tercer orden 2-covariante 1-contravariante:

$$D_k u^h_{ij} = \partial_k u^h_{ij} - u^h_{aj} \Gamma^a_{ki} - u^h_{ia} \Gamma^a_{kj} - u^a_{ij} \Gamma^h_{ak}$$

02.6. La derivada covariante absoluta del tensor métrico:

Usando la expresión [02.4_1] de la derivada absoluta de un tensor 2-covariante, y la Identidad de Ricci, encontramos que la derivada absoluta del tensor métrico es nula:

$$D_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{aj} \Gamma^a_{ki} - g_{ia} \Gamma^a_{kj} = \partial_k g_{ij} - (ki, j) - (kj, i)$$

y siendo, por la Identidad de Ricci: $\partial_k g_{ij} = (ki, j) + (kj, i)$

se tiene obviamente:

$$D_k g_{ij} = 0$$

03. SISTEMAS DE COORDENADAS LOCALMENTE INERCIALES

03.1. Definición de sistema localmente inercial o geodésico:

Sabemos que en cada punto de la variedad varia la métrica correspondiente a un sistema de referencia dado, y también sabemos que en un punto dado de la variedad la métrica correspondiente a distintos sistemas de coordenadas es distinta. Es decir, en diferentes sistemas de coordenadas $\{x^i\}$, $\{x'^i\}$, $\{x''^i\}$, ... la matriz métrica $(g_{ik})_n$ tiene valores distintos en un punto dado M_0. La pregunta que en principio nos hacemos es la siguiente: ¿Existirá algún sistema de coordenadas tal que en el punto dado M_0 se anulen los símbolos de Christoffel?

Se llama *Sistema Localmente Inercial*, o bien, *Sistema Geodésico*, o *Sistema Normal* en M_0, a un sistema de coordenadas tal que sean nulos los símbolos de Christoffel en M_0.

Dada una variedad de Riemann, nos planteamos la posibilidad de encontrar, para un punto $M_0(y^k)$ dado, un sistema localmente inercial en ese punto realizando transformaciones de coordenadas desde la métrica dada.

Así, si son $\{y_0^k\}$ los valores de las coordenadas $\{y^k\}$ en el punto M_0, y representamos la métrica y símbolos de Christoffel en dicho punto por

$$(g_{ik})_0, \ (ij,k)_0, \ \left(\Gamma_{ij}^k\right)_0$$

trataremos de encontrar otras coordenadas $\{y'^k\}$ tales que en el punto M_0, se verifique que la métrica sea tal que los símbolos de Christoffel se anulen:

$$(ij,k)'_0 = 0, \ \left(\Gamma'^k_{ij}\right)_0 = 0$$

El siguiente teorema nos da la forma de una transformación $y'^k = y'^k(y^r)$ de coordenadas que permite obtener un sistema localmente inercial en un punto cualquiera $M_0(y_0^k)$.

Teorema:

Dado el espacio de Riemann de variedad $V_n(y^1,...,y^n)$ y métrica $(g_{ik})_n$ se tiene que para cada punto $M_0(y_0^k)$ de la variedad se verifica que el sistema de coordenadas

$$y'^k = y^k - y_0^k + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^k\right)_0 \left(y^i - y_0^i\right)\left(y^j - y_0^j\right), \qquad k = 1,...n$$

es localmente inercial en el punto $M_0(y_0^k)$.

En efecto:

Podemos en principio ensayar un cambio del tipo:

$$y'^k = y^k - y_0^k + C_{ij}^k\left(y^i - y_0^i\right)\left(y^j - y_0^j\right), \quad k = 1,\ldots n \qquad [03.1\_1]$$

donde las C_{ij}^k son constantes. Derivamos:

$$\frac{\partial y'^k}{\partial y'^r} = \delta_r^k = A_r^k + C_{ij}^k A_r^i\left(y^j - y_0^j\right) + C_{ij}^k A_r^j\left(y^i - y_o^i\right) \qquad [03.1\_2]$$

en el punto $M_0(y_0^k)$ es: $\delta_r^k = \left(A_r^k\right)_0 + C_{ij}^k\left(A_r^i\right)_0.0 + C_{ij}^k\left(A_r^j\right)_0.0 \Rightarrow \left(A_r^k\right)_0 = \delta_r^k$

y además, sabemos que también se verifica la relación de Cronecker para las matrices A_r^k y B_h^r : $A_r^k.B_h^r = \delta_h^k$. Por tanto es

$$\left(A_r^k\right)_0.\left(B_h^r\right)_0 = \delta_r^k.\left(B_h^r\right)_0 = \delta_h^k \Rightarrow \left(B_h^k\right)_0 = \delta_h^k$$

Derivando ahora la expresión [04.1_2] con respecto a y'^s :

$$0 = A_{rs}^k + C_{ij}^k A_{rs}^i\left(y^j - y_0^j\right) + C_{ij}^k.A_r^i.A_s^j + C_{ij}^k A_{rs}^j\left(y^i - y_0^i\right) + C_{ij}^k.A_r^j.A_s^i$$

en el punto M_0:

$$0 = \left(A_{rs}^k\right)_0 + 0 + C_{ij}^k.\left(A_r^i\right)_0\left(A_s^j\right)_0 + 0 + C_{ij}^k.\left(A_r^j\right)_0\left(A_s^i\right)_0 = \left(A_{rs}^k\right)_0 + C_{ij}^k.\delta_r^i.\delta_s^j + C_{ij}^k.\delta_r^j.\delta_s^i$$

o sea:

$$0 = \left(A_{rs}^k\right)_0 + C_{rs}^k + C_{sr}^k$$

por lo cual:

$$\left(A_{rs}^k\right)_0 = -\left(C_{rs}^k + C_{sr}^k\right) \qquad [03.1\_3]$$

para relacionar estas constantes con los símbolos de Christoffel podemos utilizar la propiedad [01.3_1]: $\Gamma'^r_{pq} = A_p^i A_q^j B_h^r \Gamma_{ij}^h + A_{pq}^k B_k^r$. Y podemos escribir en el punto M_0:

$$\left(\Gamma'^r_{pq}\right)_0 = \delta_p^i.\delta_q^j.\delta_h^r.\left(\Gamma_{ij}^h\right)_0 + \left(A_{pq}^k\right)_0.\delta_k^r = \left(\Gamma_{pq}^h\right)_0 - \left(C_{pq}^r + C_{qp}^r\right)$$

puesto que ha de ser nulo el símbolo de Christoffel de las y'^k tendremos que hacer:

$$\left(\Gamma'^r_{pq}\right)_0 = \left(\Gamma_{pq}^h\right)_0 - \left(C_{pq}^r + C_{qp}^r\right) = 0 \Rightarrow \left(\Gamma_{pq}^r\right)_0 = \left(C_{pq}^r + C_{qp}^r\right)$$

y la solución más sencilla es

$$C_{pq}^r = C_{qp}^r = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{pq}^r\right)_0$$

esto quiere decir que una solución del cambio de coordenadas propuesto en [03.1_1] es la transformación:

$$y'^k = y^k - y_0^k + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^k\right)_0\left(y^i - y_0^i\right)\left(y^j - y_0^j\right), \quad k = 1,\ldots n$$

Corolario:

Una fundamental consecuencia de este teorema de determinación de la transformación que permite obtener un sistema de coordenadas geodésico, es que las componentes de un tensor de cualquier orden de covarianza y contravarianza en el sistema de coordenadas $\{y^k\}$ son en el punto $M_0(y_0^k)$ las mismas que las componentes de covarianza y contravarianza del tensor en el sistema $\{y'^k\}$ localmente inercial en $M_0(y_0^k)$.

Efectivamente:

No hay que hacer otra cosa que expresar que las matrices de transformación son realmente la delta de cronecker:

Sea el cambio tensorial para un tensor p-covariante q-contravariante dado por

$$t'^{i1\ldots iq}_{j1\ldots jp} = A^{k1}_{j1}\ldots A^{kp}_{jp}.B^{i1}_{h1}\ldots B^{iq}_{hq}.t^{h1\ldots hq}_{k1\ldots kp}$$

en el punto $M_0(y_0^k)$ será:

$$\left(t'^{i1\ldots iq}_{j1\ldots jp}\right)_0 = \delta^{k1}_{j1}\ldots\delta^{kp}_{jp}.\delta^{i1}_{h1}\ldots\delta^{iq}_{hq}.t^{h1\ldots hq}_{k1\ldots kp} = \left(t^{i1\ldots iq}_{j1\ldots jp}\right)_0$$

04.2. Resumen de la determinación práctica de un sistema de coordenadas geodésico:

Si queremos determinar un sistema localmente inercial en un punto $M_0(y_0^k)$ de una variedad $V_n(y^1,\ldots,y^n)$ procederemos mediante los siguientes pasos:

a) Determinamos las componentes del tensor métrico $(g_{ik})_n$ en el punto $M_0(y_0^k)$ pues quedan determinadas por las coordenadas en cada punto de la variedad (puede verse el ejemplo de variedades bidimensionales de Riemann en el apartado 01.2 de este trabajo, donde se ha determinado la métrica de la representaciones bidimensionales plana, esférica y cilíndrica).

$$\left[(g_{ik})_n\right]_0$$

b) A partir de las componentes de la métrica calculamos los símbolos de Christoffel en el punto $M_0(y_0^k)$:

$$(ij,k)_0 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)_0 + \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)_0 - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)_0\right) \qquad \left(\Gamma^k_{ij}\right)_0 = (ij,k)_0.\left(g^{kh}\right)_0$$

c) Encontramos las coordenadas buscadas del sistema geodésico mediante la expresión deducida en el teorema anterior:

$$y'^k = y^k - y_0^k + \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij}\right)_0\left(y^i - y_0^i\right)\left(y^j - y_0^j\right), \qquad k = 1,\ldots n$$

04.TENSOR DE CURVATURA. TENSORES OBTENIDOS DESDE LA FORMA COVARIANTE DE RIEMANN

04.1.La derivada segunda covariante de un vector. Tensor de curvatura:

$D_{jp}v^q = D_j\left(D_p v^q\right) = D_j t_p^q$, (habiendo llamado $t_p^q = D_p v^q$)

de lo cual, se tiene:

$$\begin{aligned}
D_{jp}v^q &= D_j t_p^q = \partial_j t_p^q + t_p^m\Gamma_{mj}^q - t_m^q\Gamma_{pj}^m = \partial_j\left(\partial_p v^q + v^h\Gamma_{hp}^q\right) + \left(\partial_p v^m + v^h\Gamma_{hp}^m\right)\Gamma_{mj}^q - \left(\partial_m v^q + v^r\Gamma_{rm}^q\right)\Gamma_{pj}^m = \\
&= \partial_{jp}v^q + \partial_j v^h\Gamma_{hp}^q + v^h\partial_j\Gamma_{hp}^q + \partial_p v^m\Gamma_{mj}^q + v^h\Gamma_{hp}^m\Gamma_{mj}^q - \partial_m v^q\Gamma_{pj}^m - v^r\Gamma_{rm}^q\Gamma_{pj}^m = \\
&= \left[\partial_j\Gamma_{hp}^q + \Gamma_{hp}^m\Gamma_{mj}^q\right]v^h + \left[\partial_{jp}v^q + \partial_j v^h\Gamma_{hp}^q + \partial_p v^m\Gamma_{mj}^q - \partial_m v^q\Gamma_{pj}^m + v^r\Gamma_{rm}^q\Gamma_{pj}^m\right] = \\
&= \left[\partial_j\Gamma_{hp}^q + \Gamma_{hp}^m\Gamma_{mj}^q\right]v^h + \Phi_{jp}
\end{aligned}$$

Donde se ha llamado $\Phi_{jp} = \partial_{jp}v^q + \partial_j v^h\Gamma_{hp}^q + \partial_p v^m\Gamma_{mj}^q - \partial_m v^q\Gamma_{pj}^m + v^r\Gamma_{rm}^q\Gamma_{pj}^m$, que es un término simétrico respecto a los subíndices j y p, pues $\Phi_{jp} = \Phi_{pj}$

Por tanto, la expresión de la derivada covariante absoluta de segundo orden del tensor de primer orden contravariante, puede expresarse por

$$\boxed{D_{jp}v^q = \left[\partial_j\Gamma_{hp}^q + \Gamma_{hp}^m\Gamma_{mj}^q\right]v^h + \Phi_{jp}}$$

(Siendo $\Phi_{jp} = \partial_{jp}v^q + \partial_j v^h\Gamma_{hp}^q + \partial_p v^m\Gamma_{mj}^q - \partial_m v^q\Gamma_{pj}^m + v^r\Gamma_{rm}^q\Gamma_{pj}^m$)

Restando las expresiones en las que permutamos los subíndices de la derivación covariante:

$$\begin{aligned}
D_{jp}v^q - D_{pj}v^q &= \left[\partial_j\Gamma_{hp}^q + \Gamma_{hp}^m\Gamma_{mj}^q\right]v^h + \Phi_{jp} - \left[\partial_p\Gamma_{hj}^q + \Gamma_{hj}^m\Gamma_{mp}^q\right]v^h - \Phi_{pj} = \\
&= \left(\left[\partial_j\Gamma_{hp}^q + \Gamma_{hp}^m\Gamma_{mj}^q\right] - \left[\partial_p\Gamma_{hj}^q + \Gamma_{hj}^m\Gamma_{mp}^q\right]\right)v^h = \left(\partial_j\Gamma_{hp}^q - \partial_p\Gamma_{hj}^q + \Gamma_{hp}^m\Gamma_{mj}^q - \Gamma_{hj}^m\Gamma_{mp}^q\right)v^h
\end{aligned}$$

es decir, se tiene que

$$D_{jp}v^q - D_{pj}v^q = R_{h,jp}^q v^h$$

Al tensor $R_{h,jp}^q$ se le llama, al igual que en los espacios euclidianos, Tensor de Curvatura, o, también, tensor de Riemann de cuatro índices y segunda especie:

$$\boxed{R_{h,jp}^q = \partial_j\Gamma_{hp}^q - \partial_p\Gamma_{hj}^q + \Gamma_{hp}^m\Gamma_{mj}^q - \Gamma_{hj}^m\Gamma_{mp}^q}$$

04.2.Símbolos de Riemann de cuatro índices y primera especie:

Se define este tensor, que se conoce también como forma covariante de Riemann, por la expresión:

$$R_{mj,hk} \equiv (mj,hk) = g_{ij}.R^{i}_{m,hk}$$

Cumpliéndose obviamente que $R^{i}_{m,hk} = g^{ij}.(mj,hk)$

04.3.El tensor de Ricci:

Se denomina Tensor de Ricci al tensor obtenido desde el Tensor reducido de Riemann de 2ª especie, esto es, del tensor de curvatura en el que el índice superior coincide con uno de los subíndices inferiores (contracción tensorial de índices):

$$R_{ij} = R^{k}_{i,kj}$$

Expresión en función de los símbolos de Christoffel:

$$R_{is} = R^{a}_{i,as} = g^{ab}.(ib,as)$$

04.4.La curvatura escalar de Riemann. La curvatura escalar de Gauss:

Llamamos Curvatura Escalar de Riemann a la contracción del Tensor de Ricci mediante el tensor métrico:

$$R = g^{mk}.R_{mk}$$

esta función escalar, definida en cada uno de los puntos de la variedad de Riemann es, como sabemos, nula en los espacios euclidianos.

Se llama Curvatura Escalar de Gauss a la magnitud obtenida desde la Curvatura Escalar de Riemann por

$$K = \frac{R}{n(n-1)}$$

La curvatura escalar permite expresar de una forma sencilla el tensor de Ricci en espacios de dos dimensiones:

$$R = g^{is}R_{is} \Rightarrow g_{is}R = g_{is}g^{is}R_{is}$$

En dos dimensiones es $g_{is}g^{is} = 2$, [04.4_1], por lo cual:

$$R_{is} = \frac{R}{2} g_{is}$$
$$R_{is} = K.g_{is}$$

(R: curvatura escalar de Riemann, K: curvatura escalar de Gauss)

Nota: La relación [04.4_1] es inmediata en espacios de dos dimensiones:

$$g_{is}g^{is} = g_{11}g^{11} + g_{12}g^{12} + g_{21}g^{21} + g_{22}g^{22} = g_{11}\frac{g_{22}}{g} - g_{12}\frac{g_{12}}{g} - g_{21}\frac{g_{21}}{g} + g_{22}\frac{g_{11}}{g} =$$
$$= \frac{2(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})}{g} = \frac{2g}{g} = 2$$

04.5.Expresión de la forma covariante de Riemann en función del tensor métrico y de los símbolos de Christoffel:

$$(hs, jp) = g_{sq}R^{q}_{h,jp} = g_{sq}\left(\partial_j \Gamma^q_{hp} - \partial_p \Gamma^q_{hj} + \Gamma^m_{hp}\Gamma^q_{mj} - \Gamma^m_{hj}\Gamma^q_{mp}\right) =$$
$$= g_{sq}\left(\partial_j \Gamma^q_{hp} + \Gamma^m_{hp}\Gamma^q_{mj}\right) - g_{sq}\left(\partial_p \Gamma^q_{hj} + \Gamma^m_{hj}\Gamma^q_{mp}\right) = g_{sq}\left[\partial_j (hp,k) g^{kq} + (hp,k)(mj,k) g^{km} g^{kq}\right] -$$
$$- g_{sq}\left[\partial_p (hj,k) g^{kq} + (hj,k)(mp,k) g^{km} g^{kq}\right] = \partial_j (hp,s) - \partial_p (hj,s) + (hp,k)(mj,s) g^{km} -$$
$$- (hj,k)(mp,s) g^{km} = \partial_j (hp,s) - \partial_p (hj,s) + g^{km}\left[(hp,k)(mj,s) - (hj,k)(mp,s)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\partial_{hj} g_{ps} + \partial_{sp} g_{hj} - \partial_{sj} g_{hp} - \partial_{hp} g_{js}\right) + g^{km}\left[(hp,k)(mj,s) - (hj,k)(mp,s)\right]$$

O sea:

$$(hs, jp) = \frac{1}{2}\left(\partial_{hj} g_{ps} + \partial_{sp} g_{hj} - \partial_{sj} g_{hp} - \partial_{hp} g_{js}\right) + g^{km}\left[(hp,k)(mj,s) - (hj,k)(mp,s)\right]$$

Nota: Se ha usado el hecho de que al ser $D_j g^{kh} = 0$ también es $\partial_j g^{kh} = 0$, que se justifica cuando usamos las coordenadas geodésicas (ver sección 03), de lo cual resulta, por ejemplo, que

$$\partial_j \Gamma^q_{hp} = \partial_j \left[(hp,k).g^{kq}\right] = g^{kq}.\partial_j (hp,k)$$

04.6. Expresión de la forma covariante de Riemann en un sistema de coordenadas localmente inercial:

Si estamos usando coordenadas geodésicas, la expresión de los símbolos de Riemann de cuatro índices y primera especie se reduce a

$$(hs, jp) = \frac{1}{2}\left(\partial_{hj} g_{ps} + \partial_{sp} g_{hj} - \partial_{sj} g_{hp} - \partial_{hp} g_{js}\right)$$

esta relación permite obtener las relaciones de simetría de los símbolos de forma sencilla:

1) $(ij,rs)=(rs,ij)$

2) $(ij,rs)=-(ij,sr)=-(ji,rs)=(ji,sr)\Rightarrow(ij,rr)=0,(ii,rs)=0$

3) $(ij,rs)+(ir,sj)+(is,jr)=0$

Estas igualdades, por su carácter tensorial, no dependen del sistema de coordenadas elegido en la representación. El haber utilizado coordenadas geodésicas ha significado simplemente una reducción en la laboriosidad de los cálculos.

04.7. Propiedad de simetría para el tensor de Ricci:

Usando las propiedades de simetría de los símbolos de Riemann, podemos establecer también la simetría del tensor de Ricci:

$$R_{is}=g^{ab}.(ib,as)=g^{ab}.(as,ib)=g^{ba}(sa,bi)=R^{b}_{s,bi}=R_{si}$$

esto quiere decir que al permutar los dos subíndices del tensor, queda invariante.

04.8. Cálculo del número total de símbolos de cuatro índices:

La determinación del número total de símbolos de Riemann de cuatro índices y primera especie es bastante laborioso, no obstante, utilizando las relaciones de simetría podemos reducir la dificultad de su cálculo.

Tengamos en cuenta que los símbolos no nulos cumplen que han de ser distintos los primeros índices y también han de ser distintos los segundos índices:

$$(ij,rs)\neq 0\Rightarrow i\neq j,\, r\neq s$$

Podemos calcular el número de parejas posibles, con los dos dígitos distintos, y, a continuación, el número total de combinaciones posibles para dos parejas. Al número total resultante es preciso restarle el número de relaciones de la forma 3) del apartado anterior, que han de tener distintos los cuatro índices, por lo que en total serian las combinaciones de n elementos tomados de cuatro en cuatro.

Se tiene, entonces:

Número de parejas de índices distintos: $\phi=\begin{pmatrix}n\\2\end{pmatrix}$

Número de combinaciones de dos parejas: $\varphi=\begin{pmatrix}\phi\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\phi\\1\end{pmatrix}$ (los de dos parejas distintas más los de dos parejas iguales)

Número de las relaciones 3): $\varphi'=\begin{pmatrix}n\\4\end{pmatrix}$

En definitiva, el número total de símbolos no nulos:

$$N=\varphi-\varphi'=\binom{\phi}{2}+\binom{\phi}{1}-\binom{n}{4}=\frac{1}{2}\phi(\phi-1)+\phi-\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)=$$

$$=\frac{1}{2}\phi(\phi+1)-\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}n(n-1)\left[\frac{1}{2}n(n-1)+1\right]-\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

En definitiva simplificando la expresión:

$$N=\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$$

Esto quiere decir, por ejemplo, que en una variedad bidimensional el número de símbolos no nulos de cuatro índices de Riemann es: N=1.

En un espacio tridimensional es N=6.

En un espacio de cuatro dimensiones encontramos que es N=20

04.9. Ejemplo de determinación de los tensores básicos en una variedad bidimensional de métrica esférica:

Supongamos que la variedad bidimensional $V_2(u,v)$ está dotada de la métrica

$$(g_{ik})_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos^2(bu)\end{pmatrix}$$

Calculemos:

a) Determinante de la matriz de Gramm:

$$g=\cos^2(bu)$$

b) Matriz inversa de Gramm:

$$(g^{ik})_2=\frac{1}{g}\begin{pmatrix}\cos^2(bu) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos^{-2}(bu)\end{pmatrix}$$

c) Elemento diferencial de longitud:

$$ds^2=g_{ik}du^2dv^2=(du,dv)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos^2(bu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}=(du,\quad \cos^2(bu)dv)\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}=$$

$$=du^2+\cos^2(bu).dv^2$$

d) Símbolos de Christoffel de primera especie:

$$(ij,k)=\frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk}+\partial_j g_{ik}-\partial_k g_{ij}\right)$$

Teniendo en cuenta que $g_{11}=1,\ g_{12}=g_{21}=0,\ g_{22}=\cos^2(bu)$, tenemos:

(11,1)=0	*(21,1)=0*
(11,2)=0	*(21,2)=-b.cos(bu).sen(bu)*
(12,1)=0	*(22,1)=b.cos(bu).sen(bu)*
(12,2)=-b.cos(bu).sen(bu)	*(22,2)=0*

e) Símbolos de Christoffel de segunda especie:

$$\Gamma_{ij}^{k}=(ij,h)g^{kh}$$

Aquí tendremos en cuenta los valores de los elementos de la matriz inversa de Gramm $g^{11}=1,\ g^{12}=g^{21}=0,\ g^{22}=\cos^{-2}(bu)$:

$$\Gamma_{11}^{1}=(11,1).g^{11}+(11,2).g^{12}=0$$
$$\Gamma_{11}^{2}=(11,1).g^{21}+(11,2).g^{22}=0$$
$$\Gamma_{12}^{1}=(12,1).g^{11}+(12,2).g^{12}=0$$
$$\Gamma_{12}^{2}=(12,1).g^{21}+(12,2).g^{22}=-b.tg(bu)$$
$$\Gamma_{21}^{1}=(21,1).g^{11}+(21,2).g^{12}=0$$
$$\Gamma_{21}^{2}=(21,1).g^{21}+(21,2).g^{22}=-b.tg(bu)$$
$$\Gamma_{22}^{1}=(22,1).g^{11}+(22,2).g^{12}=b.\cos(bu).sen(bu)$$
$$\Gamma_{22}^{2}=(22,1).g^{21}+(22,2).g^{22}=0$$

f) Tensor de Curvatura (Tensor de Riemann de 4 índices y segunda especie):

$$R_{h,jp}^{q}=\partial_j\Gamma_{hp}^{q}-\partial_p\Gamma_{hj}^{q}+\Gamma_{hp}^{m}\Gamma_{mj}^{q}-\Gamma_{hj}^{m}\Gamma_{mp}^{q}$$

Los símbolos no nulos son:

$$R_{1,12}^{1}=\partial_1\Gamma_{12}^{1}-\partial_2\Gamma_{11}^{1}+\Gamma_{12}^{m}\Gamma_{m1}^{1}-\Gamma_{11}^{m}\Gamma_{m2}^{1}=-b^2$$
$$R_{1,21}^{2}=\partial_2\Gamma_{11}^{2}-\partial_1\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{m}\Gamma_{m2}^{2}-\Gamma_{12}^{m}\Gamma_{m1}^{2}=b^2$$
$$R_{2,12}^{1}=\partial_1\Gamma_{22}^{1}-\partial_2\Gamma_{21}^{1}+\Gamma_{22}^{m}\Gamma_{m1}^{1}-\Gamma_{21}^{m}\Gamma_{m2}^{1}=b^2.\cos^2(bu)$$
$$R_{2,21}^{1}=\partial_2\Gamma_{21}^{1}-\partial_1\Gamma_{22}^{1}+\Gamma_{21}^{m}\Gamma_{m2}^{1}-\Gamma_{22}^{m}\Gamma_{m1}^{1}=-b^2.\cos^2(bu)$$

g) Forma covariante de Riemann (Símbolos de 4 índices y primera especie):

$$(ij,rs)=g_{kj}R_{i,rs}^{k}$$

El único símbolo no nulo viene expresado por:

$$(12,12) = g_{k2} R^k_{1,12} = g_{12} R^1_{1,12} + g_{22} R^2_{1,12} = -b^2 . \cos^2(bu)$$

h) Tensor de Ricci:

$$R_{is} = R^m_{i,mk}$$

en este ejemplo solo son no nulos dos símbolos:

$$R_{11} = R^2_{1,21} = b^2$$
$$R_{22} = R^1_{2,12} = b^2 . \cos^2(bu)$$

i) Curvatura escalar de Riemann:

$$R = g^{mk} R_{mk}$$

$$R = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = 1.b^2 + \cos^{-2}(bu). \cos^2(bu) = b^2 + b^2 = 2b^2$$

j) Curvatura escalar de Gauss:

$$K = \frac{R}{n(n-1)}$$

$$K = \frac{R}{2} = \frac{2b^2}{2} = b^2$$

k) Comprobación de que se trata de una métrica esférica de radio 1/b:

$$ds^2 = g_{ik} du^2 dv^2 = du^2 + \cos^2(bu).dv^2$$

Haciendo el cambio de variables:

$\varphi = bu,\ \omega = bv$, se tiene: $d\varphi = bdu,\ d\omega = bdv$, con lo cual, al sustituir:

$$ds^2 = \frac{1}{b^2} d\varphi^2 + \frac{1}{b^2} \cos^2 \varphi . d\omega^2 = \left(\frac{1}{b}\right)^2 d\varphi^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 \cos^2 \varphi . d\omega^2$$

y la matriz métrica resultante es

$$(g_{ik})_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{b}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{b}\right)^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$$

que, como hemos visto en la página 4, corresponde a una métrica esférica de radio $r = \frac{1}{b}$.

05.LA IDENTIDAD DE BIANCHI

05.1. La obtención de la Identidad de Bianchi:

Se verifica, para la derivación covariante absoluta del tensor de curvatura, una relación consistente en permutar circularmente tres índices, el de la derivación parcial y los dos subíndices secundarios del tensor. Esta relación aditiva se conoce como Identidad de Bianchi:

$$\partial_t R^k_{i,rs} + \partial_r R^k_{i,st} + \partial_s R^k_{i,tr} = 0$$

Por simplicidad, podemos obtener la relación partiendo de la expresión en coordenadas geodésicas del tensor de curvatura, ya que al tratarse de una relación tensorial no depende del sistema de coordenadas que se utilice.

$$R^k_{i,rs} = \partial_r \Gamma^k_{is} - \partial_s \Gamma^k_{ir}$$

Escribimos la derivada con respecto a la varible x^t:

$$\partial_t R^k_{i,rs} = \partial_{rt} \Gamma^k_{is} - \partial_{st} \Gamma^k_{ir}$$

y, permutando subíndices:

$$\partial_r R^k_{i,rs} = \partial_{tr} \Gamma^k_{is} - \partial_{sr} \Gamma^k_{it}$$

$$\partial_s R^k_{i,tr} = \partial_{ts} \Gamma^k_{ir} - \partial_{rs} \Gamma^k_{it}$$

Si sumamos las tres igualdades:

$$\partial_t R^k_{i,rs} + \partial_r R^k_{i,ts} + \partial_s R^k_{i,tr} = 2\partial_{rt} \Gamma^k_{is} - 2\partial_{rs} \Gamma^k_{it} = 2\left(\partial_{rt} \Gamma^k_{is} - \partial_{rs} \Gamma^k_{it}\right) = 2\partial_r R^k_{i,ts}$$

por tanto:

$$\partial_t R^k_{i,rs} - \partial_r R^k_{i,ts} + \partial_s R^k_{i,tr} = 0$$

finalmente, por la propiedad de cambio de signo al permutar los dos subíndices secundarios del tensor de curvatura:

$$\partial_t R^k_{i,rs} + \partial_r R^k_{i,st} + \partial_s R^k_{i,tr} = 0$$

05.2. Teorema:

Se verifica la relación:

$$D_a R^a_s = \frac{1}{2} \partial_s R$$

donde es R^a_s el tensor contraido de Ricci mediante el tensor métrico, $R^a_s = g^{ia}.R_{is}$, y R es la curvatura escalar de Riemann.

En efecto:

Si hacemos *k=r=a* en la Identidad de Bianchi, se tiene:

$$\partial_t R^a_{i,as} + \partial_r R^a_{i,st} + \partial_s R^a_{i,ta} = 0$$

o bien reordenando índices del tercer sumando:

$$\partial_t R^a_{i,as} + \partial_r R^a_{i,st} - \partial_s R^a_{i,at} = 0$$

con lo cual queda:

$$\partial_t R_{is} + \partial_a R^a_{i,st} - \partial_s R_{it} = 0$$

o bien:

$$\partial_t R_{is} + \partial_a g^{ab}(ib, st) - \partial_s R_{it} = 0$$

si, con objeto de contraer uno de los tensores de Ricci que figuran en la expresión, multiplicamos toda la expresión por g^{it} y tenemos en cuenta que por un resultado anterior es $D_t g^{it}=0$, se tiene:

$$\partial_t g^{it} R_{is} + \partial_a g^{ab} g^{it}(ib, st) - \partial_s g^{it} R_{it} = 0$$

$$\partial_t R^t_s + \partial_a g^{ab} R^t_{b,st} - \partial_s R = 0$$

$$\partial_t R^t_s - \partial_a g^{ab} R^t_{b,ts} - \partial_s R = 0$$

$$\partial_t R^t_s + \partial_a g^{ab} R_{sb} - \partial_s R = 0$$

$$\partial_t R^t_s + \partial_a R^a_s - \partial_s R = 0$$

y queda, finalmente:

$$2\partial_a R^a_s - \partial_s R = 0 \Rightarrow \partial_a R^a_s = \frac{1}{2}\partial_s R$$

06.TENSOR DE EINSTEIN. ESPACIOS DE EINSTEIN

06.1. Definición del Tensor de Einstein:

Se define el Tensor de Einstein como el tensor E_{is} obtenido desde el Tensor de Ricci por la expresión:

$$E_{is} = R_{is} - \frac{1}{2} R.g_{is}$$

que podemos expresar como un tensor de segundo orden mixto: $E_s^a = g^{ia} E_{is}$

Es inmediato que en los espacios de Riemann de dos dimensiones, R_2, el Tensor de Einstein es idénticamente nulo.

$$E_{is} = R_{is} - \frac{1}{2} R.g_{is} = k.g_{is} - \frac{1}{2} R.g_{is} = \frac{1}{2} R.g_{is} - \frac{1}{2} R.g_{is} = 0$$

06.2. Teorema:

La derivada covariante del tensor mixto de Einstein es nula:

$$D_a E_s^a = 0$$

En efecto:

Siendo $E_s^a = g^{ia} E_{is} = g^{ia} R_{is} - \frac{1}{2} R.g^{ia} g_{is} = R_s^a - \frac{1}{2} R.\delta_s^a$

La derivada covariante será:

$$D_a E_s^a = D_a R_s^a - \frac{1}{2} \delta_s^a D_a R = D_a R_s^a - \frac{1}{2} D_s R = \frac{1}{2} D_s R - \frac{1}{2} D_s R = 0$$

06.3. Espacios de Einstein:

Se define un Espacio de Einstein como un espacio de Riemann en donde el tensor de Ricci es el producto de una función escalar por el tensor métrico:

$$R_{is} = \phi.g_{is}$$

En los espacios de Riemann de dos dimensiones sabemos que se verifica que el tensor de Ricci es

$$R_{is} = \frac{1}{2} R.g_{is}$$

siendo R la curvatura escalar de Riemann, por lo que podemos afirmar que estos espacios son casos particulares de espacios de Einstein.

06.4. Expresión de los tensores de Ricci e Einstein en un espacio de Einstein:

De la definición de curvatura escalar de Riemann, se tiene, en un espacio n-dimensional:

$$R = g^{is} R_{is} = g^{is} \phi . g_{is} = \phi g^{is} g_{is} = \phi n$$

por tanto es $\phi = \frac{1}{n} R$.

El tensor de Ricci es, en un espacio de Einstein n-dimensional: $R_{is} = \frac{1}{n} .R.g_{is}$

Y el tensor de Einstein:

$$E_{is} = \frac{1}{n} R.g_{is} - \frac{1}{2} R.g_{is} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right) .R.g_{is}$$

06.5. La curvatura escalar de Riemann en un espacio de Einstein:

En todo espacio de Einstein, E_n, con n>2, se verifica que la curvatura escalar de Riemann es constante.

En efecto:

de ser $R_{is} = \frac{1}{n} .R.g_{is}$ en un espacio de Einstein, se tiene la expresión del tensor mixto de Ricci de la forma:

$$R_s^a = g^{ia} .R_{is} = \frac{1}{n} .R.g_{is} g^{ia} = \frac{1}{n} R.\delta_a^s$$

derivando:

$$\partial_a R_s^a = \frac{1}{n} \partial_a R.\delta_a^s = \frac{1}{n} \partial_s R$$

y puesto que en todo espacio de Riemann es $\partial_a R_s^a = \frac{1}{2} \partial_s R$

se tiene que $\partial_a R_s^a = \frac{1}{2} \partial_s R = \frac{1}{n} \partial_s R \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) .\partial_s R = 0 \Rightarrow \partial_s R = 0$

es decir, la curvatura escalar de Rieman, R, es constante en los espacios de Einstein.

06.6. Teorema de Schur:

Todo espacio riemanniano en el que se satisfacen, para alguna función escalar ϕ, las igualdades:

$$(ij,rs)=\phi.\left(g_{ir}g_{js}-g_{jr}g_{is}\right)$$

Es un espacio de Einstein, en donde

$$\phi=-\frac{R}{n(n-1)}$$

En efecto:

Multiplicamos la expresión dada por g^{aj}, al objeto de contraer tensores:

$$g^{aj}(ij,rs)=\phi.g^{aj}\left(g_{ir}g_{js}-g_{jr}g_{is}\right)=\phi.\left(g_{ir}g^{aj}g_{js}-g_{jr}g^{aj}g_{is}\right)=\phi.\left(g_{ir}\delta_s^a-\delta_r^a g_{is}\right)$$

o sea:

$$R_{i,as}^{a}=\phi.\left(g_{ir}\delta_s^a-\delta_r^a g_{is}\right)$$

si hacemos $r=a$:

$$R_{i,as}^{a}=R_{is}=\phi.\left(g_{ia}\delta_s^a-\delta_a^a g_{is}\right)=\phi.\left(g_{is}-n.g_{is}\right)=-g_{is}.\phi.(n-1)$$

es decir, $R_{is}=-\phi.(n-1).g_{is}$, por lo que se trata de un espacio de Einstein.

Y como en estos espacios se cumple que $R_{is}=\frac{1}{n}.R.g_{is}$, se tiene:

$$R_{is}=\frac{1}{n}.R.g_{is}=-\phi.(n-1).g_{is}\Rightarrow\phi=-\frac{R}{n(n-1)}$$

O sea:

$$\phi=-K$$

(donde K representa a la curvatura escalar de Gauss)