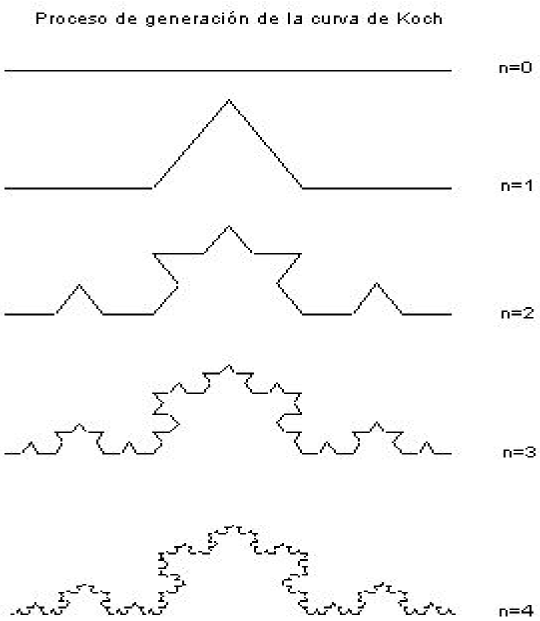
FRACTALES Y SU RELACIÓN CON EL CAOS

Joaquín González Álvarez

Un fractal es un ente geométrico el cual en su desarrollo espacial va reiterando una misma forma cada vez a menor escala. En virtud de esa propiedad definitoria, si realizamos un zoom de cualquier porción del fractal veremos la misma forma del fractal completo.

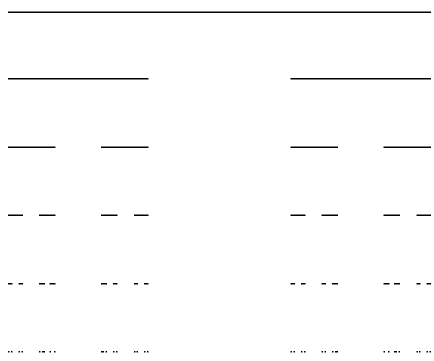


Como primer ejemplo de fractal veremos uno de los mas conocidos, el Fractal de Koch el cual se obtiene dando los siguientes pasos (esto es, siguiendo un algoritmo): un segmento de recta (arista) se divide en n=3 partes iguales, sobre la del medio levantamos un triángulo equilátero y borramos su base, Habremos así obtenido N=4 nuevos segmentos (aristas). Esta operación se irá repitiendo (iterando) en cada uno de las nuevas aristas, teoricamente hasta el infinito.

Llegado aquí tenemos que definir lo que es dimensión (o número de dimensiones) de una figura geométrica según Hausdorff, la cual se aplica tanto a fractales como a cualquier figura conocida. Llamamos D a la dimensión, n a las partes en que se divide la arista inicial y N al número de nuevas aristas que se obtienen como vimos en el Fractal de Koch, con lo cual la dimensión de Hausdorff vendrá dada por $D=\log N/\log n$. Así que para el Fractal de Koch: $D=\log 4/\log 3$

Utilizando una calculadora o una tabla de logaritmos obtenemos que la dimensión es D=1.16 así conocemos una propiedad mas de los fractales, ¡su dimensión es fraccioaria! y no un número entero 1, 2 o 3 como estamos acostumbrados para las figuras geométricas conocidas. Veamos como la dimensión de Hausdorff es válida para una figura conocida como un cubo o dado. Imaginemos un cubo de jabón cada una de cuyas aristas las dividimos mediante una marca, en n=2 partes iguales y con un cuchillo hacemos los cortes necesarios en las marcas para obtener N=8 pequeños cubos, aplicando la definición de Hausdorff tendremos que la dimensión del cubo es $D=\log 8/\log 2=3$ cosa que ya sabíamos.

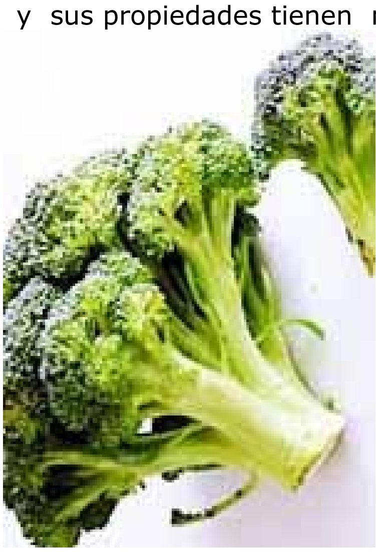
Porque lo necesitaremos para explicar la relación caos/fractal, pasamos a describir el Fractal de Cantor o Polvo de Cantor. Un segmemto de recta lo dividimos en tres partes iguales y borramos la del medio, lo mismo haremos con los dos segmentos obtenidos, al repetir (iterar) unas cuantas veces esta operación los segmentos se harán cada vez mas pequeños semejando puntos luciendo como una fila de partículas de polvo dispuestas con regularidad fractal. Los lectores entenderán mucho mejor dibujando los dos fractales descritos siguiendo los pasos indicados (el algoritmo) armados solamente de papel, lápiz ¡y goma!. Pero lo que mas nos interesa para la relación con el caos es que parecen puntos como marcas en una regla o escala graduada, a las cuales se les puede asignar un número según su distancia al punto que marquemos como origen de esa regla o escala graduada.

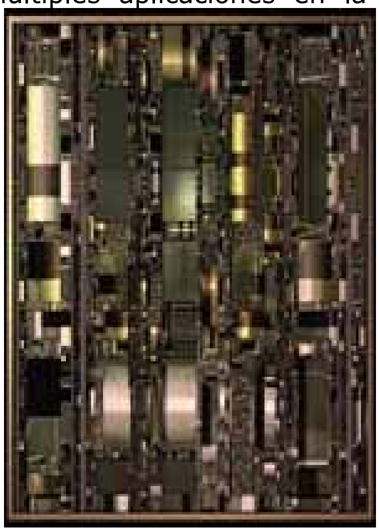


Fractal de Cantor

Los fractales se han popularizado por la belleza de las figuras que se obtienen siguiendo distintos algoritmos ideados por matemáticos que han contribuído de esa forma a lo que se conoce como Arte Fractal. Ejemplos famosos son los fractales ideados por Benoit de Mandelbrot, el matemático autor de la Teoría del Fractal, la cual junto con la del Caos, constituyen exponentes de la posmodernidad científica y vertientes de la Teoría de la Complejidad.

Formas asimilables a fractales aparecen en la naturaleza, en la disposición de las ramas y hojas de plantas como algunos helechos y vegetales como el brocoli entre otros ejemplos. Los fractales y sus propiedades tienen múltiples aplicaciones en la ciencia y la técnica, siendo una de las mas conocidas el procesamiento de imágenes.



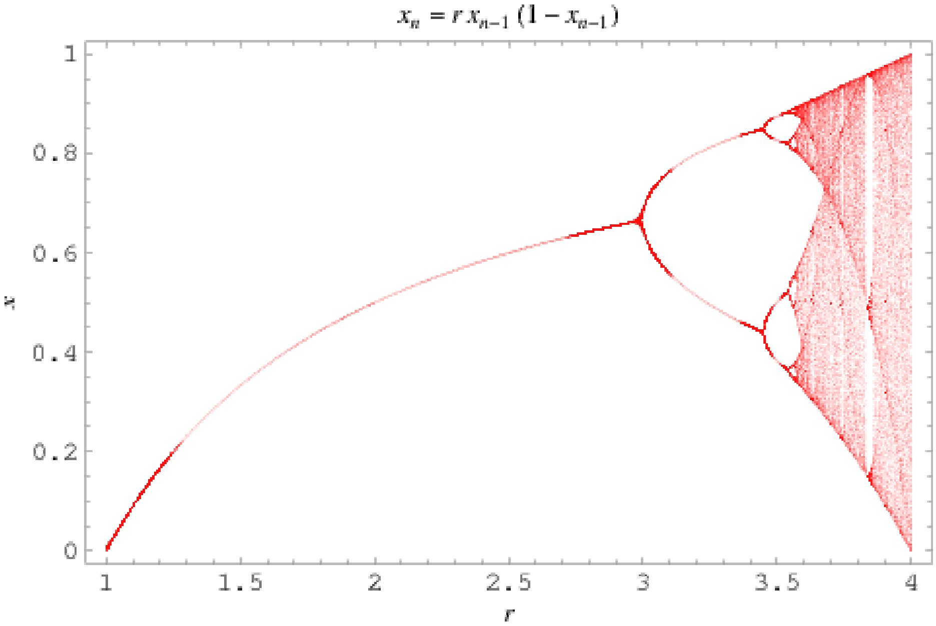


Otra de las mas importantes aplicaciones de los fractales la encontramos en el ámbito de la economía, y se debe al economista norteamericano ya fallecido Ralph Nelson Elliot el cual advirtió cuando aún no se conocían los fractales, en los gráficos del comportamiento de los mercados, que éstos reiteraban periódicamente un mismo patrón cada vez a una escala menor, de lo cual dedujo que el análisis de esos gráficos permitiría pronosticar futuros comportamientos de los mercados y prevenir crisis cíclicas de la económía. Este procedimiento de pronóstico se conoce hoy como Método del Fractal. Ya nos referimos al Arte Fractal pero no sólo en la plástica aparece la fractalidad, intencional o casualmente, en la música especificamente obras de Mozart algunos expertos advierten presencia de regularidad fractal.

Pero es en ciencia fundamental donde la teoría del fractal desempeña su principal papel. Veamos como aparece la fractalidad en la Teoría del Caos, Para ello recordaremos lo que en mi artículo *¿Qué trata la Teoría del Caos?* dijimos sobre como aparece la situación de caos en el tratamiento matemático del crecimiento numérico de una especie animal en determinada circunstancia de espacio y tiempo. Necesitamos apelar muy elementalmente a una matemática que sólo requiere del lector que sepa multiplicar y restar. El citado crecimiento se estudia mediante una fórmula llamada Mapa Logístico:

$$X' = rX(1-X)$$

Donde X' número de ejemplares en una etapa, X número de ejemplares en la etapa anterior y r tasa de crecimiento la cual depende de las condiciones de sobrevivencia, alimentación disponible, condiciones climáticas, etc. Los números de ejemplares se dan generalmente en fraccions de millar. Sencillamente lo que indica la fórmula del Mapa es que para hallar el valor de X' se multiplique el vlor de r por el de X y lo que se obtenga, por el resultado de la resta 1 menos X.



Con un ejemplo veremos como se opera con el Mapa Logístico. Comencemos con r=2 y X=0.8, mediante el Mapa calculamos X', el valor obtenido lo tomamos como una nueva X para un nuevo cálculo utilizando el Mapa con lo cual obtenemos una nueva X'. Este proceso llamado iteración lo repetimos varias veces (puede usarse la mas simple de las calculadoras de bolsillo). Asombrosamente al llegar a $X' = 0.5$ (o aproximadamente) notaremos que aunque se quiera seguir la iteración ¡siempre dará el mismo resultado! Los valores con los que la calculadora parece "trabarse", en este caso 0.5, se llaman atractores. El número de ejemplares se queda estable en ese número mientras la tasa r no varíe. Para r=3, los atractores serán dos en vez de uno, el número de ejemplares se mantendrá alternando entre esos dos valores mientras no varíe la tasa r=3. Cuando la tasa sea 3.5 los atractores serán cuatro, 0.3828, 0.8269, 0.5009 y 0.8750. Pero cuando la tasa sea r=4, ya no habrá repetición alguna, no habrá atractores ¡se habrá llegado a la situación de caos!. Anímense a comprobar con su calculadora, con r=3,5 comenzando con X=0.3828 y verán que cuando iterando lleguen 0.8750 al continuar volverá 0.3828 y luego los mismos valores antes encontrados. (Pero puede hacerlo también con lápiz y papel). Les va a agradar la esperiencia.

Estamos ahora en condiciones de comprobar la relación caos-fractales. Si en una recta toman un punto como cero y sitúan puntos en la recta a distancias de cero iguales a 0.3828dm, 0.8269dm, 0.5009dm y 0.8750dm, o sea los atrctores para r=3.5 justo antes de r=4 o sea "a las puertas del caos", esos puntos estarán en la misma posición relativa que los puntos (las partículas de polvo) antes explicados del Fractal o Polvo de Cantor. Esa aparición del Fractal de Cantor se encuentra en múltiples situaciones de caos además de la mostrada en el crecimiento de una especie animal.

No obstante la necesidad de utilizar la matemática creemos haber expuesto lo fundamental de la relación entre las teorías del Fractal y del Caos y mostrado las muy curiosas propiedades del Mapa Logístico al que suele llamarse de varias meneras, ecuación mágica, divina, diabólica, etc.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com