Sobre la Repetición de los Calendarios Temporales

por George Braddock Stradtmann
georgebraddock@gmail.com

Enero 6 de 2012

Resumen

El tema de los calendarios es muy apropiado para ser investigado matemáticamente usando el lenguaje de las congruencias numéricas. En este artículo damos a conocer los resultados de una investigación que realizamos para conocer con que frecuencia se repiten los calendarios temporales y cuáles son las reglas y las fórmulas matemáticas que rigen ese comportamiento repetitivo. Deducimos una ecuación matemática, que llamamos ecuación fundamental de los calendarios, que nos permite conocer cual calendario se usará en un año determinado, conociendo cual calendario se usó en otro año anterior. Usamos el algoritmo de división de Euclides y las propiedades de las congruencias numéricas y de la función "parte entera" para simplificar la ecuación general encontrada y poder deducir de ella las ecuaciones diofánticas correspondientes a los diferentes casos particulares. Todo este proceso de búsqueda de una ecuación matemática y su posterior simplificación para deducir las ecuaciones diofánticas es muy instructivo. El análisis y la interpretación que le damos a esas ecuaciones nos permite comprender el comportamiento repetitivo de los calendarios.

Abstract

The calendar's topic is very adapted to be investigated mathematically using the language of the numerical congruencies. In this article we state the results of a research that we realize to know how frequently the temporary calendars repeat themselves and which are the rules and the mathematical formulas that govern this repetitive behavior. We deduce a mathematical equation, which we call the fundamental equation of the calendars, which allows us to know which calendar will be used in a certain year, knowing which calendar was used in a previous year. We use the of Euclid's division algorithm and the properties of numerical congruencies and of the integer part function to simplify the general equation found and to be able to deduce the diofantic equations corresponding to the different particular cases. All this process of research of a mathematical equation and the later simplification to deduce the diofantic equations is very instructive. The analysis and the interpretation that we give to these equations allows us to understand the repetitive behavior of the calendars.

1. INTRODUCCIÓN

En la bibliografía relacionada con calendarios es común encontrar relatos sobre la historia del calendario. También es común encontrar cálculos que nos permiten conocer qué día de la semana corresponde a una fecha determinada, tomando en cuenta incluso, la corrección de 10 días que el papa Gregorio XIII decretó en el año 1582. Para esos cálculos se usan mucho las congruencias numéricas. Véase el interesante trabajo: Del Tiempo y calendarios ([4] págs. 221-234).

Pero sobre la frecuencia con que se repiten los calendarios temporales no hay información bibliográfica. Muchas veces nos ha ocurrido que adquirimos una agenda de lujo a un precio ridículamente bajo, porque fue adquirida después de medio año, cuando se espera que tendrá poco uso. Pero no sabemos cuántos años tendremos que esperar para volver a usar esa agenda, pues no hay información sobre el tema.

Con este trabajo pensamos llenar ese vacío en la bibliografía: realizamos una investigación matemática para esclarecer cual es la relación entre el calendario usado en un año con el calendario que se debe usar en otro año posterior. El análisis y la interpretación que le damos a las ecuaciones diofánticas que deducimos, nos permite comprender el comportamiento repetitivo de los calendarios.

1.1. CONGRUENCIAS NUMÉRICAS

El concepto de congruencia numérica es muy usado en este artículo.

Si a, b, c son números enteros, se dice que a es congruente con b módulo c si ocurre que la diferencia a-b es un múltiplo de c: $a \equiv b \pmod{c} \iff c|(a-b)$

Es decir $a \equiv b \pmod{c}$ si y solo si existe un entero k tal que $a = c \cdot k + b$

Como en este trabajo solo nos interesan los períodos de repetición de los calendarios a corto plazo, supondremos que todos los años bisiestos son múltiplos de 4.

Entonces:

Si un año es bisiesto, diremos que es congruente con 0 módulo 4.

Si un año está un año después de un bisiesto, diremos que es congruente con 1 módulo 4.

Si un año está dos años después de un bisiesto, diremos que es congruente con 2 módulo 4.

Si un año está tres años después de un bisiesto, diremos que es congruente con 3 módulo 4.

También usamos las congruencias de esta manera:

Si hoy es Lunes dentro de 59 días será Jueves, es decir 3 días de la semana después, ya que $59 \equiv 3 \pmod{7}$ pues $59 = 7 \cdot 8 + 3$

Para más información sobre congruencias numéricas véase [1] Cap. 4 y también [3] Cap. 4.

1.2. EL CALENDARIO Y SUS DESFASES

No es posible crear un calendario donde no se produzca algún tipo de desfase. Algunos de los desfases que se pueden producir son los siguientes:

1. **Desfase entre el calendario y las horas del día.**

   Si un calendario tuviera un número de días no entero, se produciría un desfase de este tipo.

2. **Desfase entre el calendario y los días de la semana.**

   Si el número de días de un calendario no es múltiplo de 7, se produce este desfase: si en un año no bisiesto el calendario empieza un Lunes, el próximo año empezará un Martes. Si en un año bisiesto el calendario empieza un Jueves, el próximo año empezará un Sábado.

Algunas propuestas de reforma del calendario del siglo pasado, proponían que el calendario tuviera 364 días es decir 52 semanas exactas y un día adicional (o dos en los años bisiestos) que no se llamaría como los días de la semana (Lunes, Martes,..., Domingo) sino que tendría un nombre especial, pues no se consideraría como un día de la semana. Habría entonces solo 2 calendarios: uno para años no bisiestos y uno para años bisiestos. Pero esta propuesta tuvo la oposición de agrupaciones religiosas que no querían que se viera interrumpido el ciclo milenario de las semanas.

3. **Desfase entre el calendario y los eventos solares.**

   Es un desfase relacionado con la posición de la Tierra en su órbita y por lo tanto con las fechas en que ocurren los solsticios y los equinoccios es decir, con las fechas de las estaciones del año.

   Las posiciones relativas de la Tierra, el Sol y las estrellas lejanas se repiten después de un año que los astrónomos llaman *año trópico*. El año trópico no tiene un número entero de días: tiene una duración de 365,242189... días. Esto ocasiona que la hora en que ocurre un solsticio o equinoccio en un año no coincida exactamente con la hora en que ocurrió o ocurrirá en otro año.

   Si un calendario tuviera una duración exactamente igual al año trópico, no se produciría este desfase.

4. **Desfase entre el calendario y los eventos lunares.**

   Son desfases relacionados con duración del mes lunar que es de $29,530588\ldots$ días.

   Si un calendario tiene 365 días, tendrá entonces $12,360065$ lunaciones que, como no es un número entero, ocasionará un desfase entre el calendario y los eventos lunares. Si un calendario tuviera $354,367056\ldots$ días (12 meses lunares exactos) no se produciría este desfase y todos los años iniciarían con la misma fase lunar.

5. **Desfase entre los eventos solares y los eventos lunares.**

   Un año trópico no tiene un número entero de meses lunares: tiene $12,368266\ldots$ meses. Es inevitable entonces que se produzcan desfases entre los eventos solares y los lunares.

   Algunas fiestas religiosas son fijas y otras son móviles, según se basen en eventos solares o en eventos lunares respectivamente. Por ejemplo, la Navidad es una fiesta fija que ocurre el 25 de Diciembre, la Pascua en cambio, es una fiesta móvil. En el Concilio de Nicea del año 325 d.C. se definió que la fecha de la Pascua sería el primer Domingo, después de la primera Luna Llena (eclesiástica, basada en tablas, que no es la misma Luna Llena astronómica), que ocurra después del 21 de Marzo, que es la fecha del calendario correspondiente al equinoccio de primavera (Véase [5] pág. 581).

Al crear un calendario se puede evitar que se produzca uno de los desfases, pero no todos ellos. El problema de encontrar un calendario donde no se produzca ninguno de los cinco desfases es realmente un problema insoluble, como lo era el famoso problema de *la cuadratura del círculo*.

Por eso dice Harper:

> **La historia del calendario es en gran parte una historia acerca de los intentos de los astrónomos, sacerdotes y matemáticos para forzar el año trópico y el mes lunar para encajar en un esquema que solo comprende números enteros. Como los geómetras que soñaron con la cuadratura del círculo, ellos enfrentaron una labor imposible** ([2], pág. 1)

1.3. BREVÍSIMA HISTORIA DEL CALENDARIO GREGORIANO [1]

En el año 46 a. C. Julio Cesar, contando con la asesoría el astrónomo Sosígenes de Alejandría, implantó en Roma un nuevo calendario, al que se le llamó Julius y más tarde **Juliano**, en su honor.

El calendario Juliano suponía que la duración del año era de 365,25 días pero como el calendario tenía solamente 365 días, cada 4 años se le añadía un día en el mes de Febrero, mes que tendría dos días 24 de Febrero: al primero le llamaban los romanos **ante diem sextum kalendas martias**, al segundo le llamaban **ante diem *bi-sextum* kalendas martias**, de ahí el nombre de bisiesto.

La diferencia entre el año de 365,25 días (en que se basaba el calendario Juliano) y el año trópico de 365,242189... días era de 0,007811... días por año. Por ello, entre el año 325 (en que se celebró el Concilio de Nicea) y el año 1572 (en que fue nombrado papa Gregorio XIII), ya se había producido un desfase de casi 10 días entre los eventos solares y el calendario:

$$0.007811 \text{ días / año} \cdot (1572 - 325) \text{ años} = \ 9.74032 \text{ días.}$$

Cuando Gregorio XIII fue elegido papa en 1572, fue informado sobre el gran desfase que ya se había producido (el equinoccio de primavera estaba ocurriendo 10 días antes que en la época del Concilio de Nicea). Encargó entonces a Luis Lilio (circa 1510 – 1576) médico y filósofo italiano y al jesuita alemán Chistopher Clavius (1538 – 1612), matemático, astrónomo y gnomonista, que trabajaran en una comisión para la reforma del calendario.

A ese nuevo calendario se le conocería como Calendario Gregoriano y empezó a regir a partir del Viernes (gregoriano) 15 de Octubre de 1582. El día anterior había sido Jueves (Juliano) 4 de Octubre. Este calendario es el que se usa actualmente. Supone que la duración del año trópico es de 365,2425 días, valor tomado de las tablas astronómicas del año 1252, llamadas *Tablas Alfonsies* en honor al rey de Castilla Alfonso El Sabio.

$$\text{Año Trópico} \cong 365,2425 = 365 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{400}$$

Según la expresión anterior, el calendario gregoriano tiene 365 días, cada 4 años se le añade un día y cada 400 años se le quitan 3 días, para mantener su sincronía con los eventos solares.

Por eso las reglas que rigen el calendario gregoriano son las siguientes:

1 La duración del año del calendario es de 365 días.

2 Cada 4 años, en los años que son múltiplos de 4, se añadirá un día al calendario, en el mes de Febrero. Estos años se llaman bisiestos y tendrán 366 días.

3 Los años seculares (múltiplos de 100), que deberían ser bisiestos según la regla anterior, no serán bisiestos, a no ser que sean múltiplos de 400, en cuyo caso sí serán bisiestos.

Como en este trabajo, solo nos interesan los períodos de repetición de los calendarios a corto plazo, supondremos que los calendarios se rigen solo por las 2 primeras reglas, como en los antiguos calendarios Julianos.

[1] Algunos de los detalles históricos que mencionamos fueron tomados de la dirección web [6].

2. LA REPETICIÓN DE LOS CALENDARIOS

2.1. CODIFICACIÓN DE LOS CALENDARIOS

Si no existieran los años bisiestos habría solo siete distintos calendarios, cada uno con 365 días. Podríamos identificar a cada uno de ellos con una letra que indique cual es el día correspondiente al 1° de Enero. Por ejemplo, el calendario "S" sería el calendario que se usaría en aquellos años en que el 1° de Enero sea un día Sábado (como ocurrió en el año 2000). Como los calendarios tendrían 365 días y $365 = 7 \cdot 52 + 1$ es decir $365 \equiv 1 \pmod 7$ el próximo año (el año 2001) se iniciaría con el día Domingo. Entonces el calendario "S" podría volver a usarse 7 años después (en el año 2007).

Pero hay años que no son bisiestos y años que si lo son. Los años no-bisiestos son aquellos que tienen 365 días, con 28 días en el mes de Febrero, mientras que los bisiestos son aquellos que tienen 366 días, con 29 días en el mes de Febrero. Entonces necesitamos tener 14 calendarios distintos: 7 de ellos para ser usados en años no-bisiestos y otros 7 para ser usados en años bisiestos.

Identificaremos a los días de la semana con un código alfabético y con un código numérico, como se muestra en la siguiente tabla:

Día	Código Alfabético	Código Numérico
Domingo	D	0
Lunes	L	1
Martes	K	2
Miércoles	M	3
Jueves	J	4
Viernes	V	5
Sábado	S	6

TABLA 1. Códigos alfabético y numérico de los días de la semana.

En los años no-bisiestos transcurren 59 días (31 días de Enero y 28 días de Febrero) antes del 1° de Marzo y como

$$59 \equiv 3 \pmod 7$$

entonces el código numérico del día correspondiente al 1° de Marzo será 3 unidades mayor que el código correspondiente al 1° de Enero. Por ejemplo, en el año 1999 el 1° de Enero es Viernes (día #5), entonces el 1° de Marzo será Lunes (día #1) pues

$$5 + 3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$$

En los años bisiestos transcurren 60 días (31 días de Enero y 29 días de Febrero) antes del 1° de Marzo y como

$$60 \equiv 4 \pmod 7$$

entonces el código numérico del día correspondiente al 1° de Marzo será 4 más que el código correspondiente al 1° de Enero.

Por ejemplo, en el año 2000 el 1° de Enero es Sábado (día #6), entonces el 1° de Marzo será Miércoles (día #3) pues

$$6 + 4 = 10 \equiv 3 \pmod 7$$

Podemos identificar a los 14 calendarios con un código alfabético formado por 2 letras, la primera de las cuales es el código alfabético correspondiente al 1° de Enero y la segunda el código correspondiente al 1° de Marzo.

El código numérico del calendario para un año A puede estar dado por

$$C(A) = 10\,a + b$$

donde **a** es el código numérico del día 1° de Enero y $b = a + 3$ para años no-bisiestos y $b = a + 4$ para años bisiestos. Entonces

$$C(A) = 11\,a + b' \tag{1}$$

con $b' = 3$ si A no es bisiesto y $b' = 4$ si A es bisiesto.

La siguiente tabla muestra los códigos que le asignamos a los 14 diferentes calendarios, mostrando con un * aquellos calendarios que se usan en años bisiestos:

Calendario	Código Alfabético	Código Numérico
C_1	DM	03
C_2	DJ*	04
C_3	LJ	14
C_4	LV*	15
C_5	KV	25
C_6	KW*	26
C_7	MS	36
C_8	MD*	37
C_9	JD	47
C_{10}	JL*	48
C_{11}	VL	58
C_{12}	VK*	59
C_{13}	SK	69
C_{14}	SM*	70

TABLA 2. Códigos alfabético y numérico de los 14 calendarios.

En algunas ocasiones tendremos que usar la fórmula (1) con valores de **a** mayores que 6. Entonces podemos obtener valores de C(A) mayores de 70.

Si obtenemos un número de calendario mayor que 70, su residuo módulo 77 será el número correcto.

Esto es así ya que si $a = 7 + k$ entonces $C(A) = 11\,a + b' = 11\,(7 + k) + b' = 77 + 11k + b'$ mientras que si $a = (7 + k) \pmod 7 = k$ entonces $C(A) = 11\,a + b' = 11k + b'$ que difieren precisamente en 77 unidades.

Esto ocurre también con otros métodos que usaremos para calcular el valor del número de calendario.

Por eso, en este artículo, usaremos con mucha frecuencia las congruencias módulo 77.

La siguiente tabla muestra los códigos de los calendarios de los años del 2000 al 2077. Para cada año se muestra el código alfabético (ca), el código numérico (cn) y un número que indica dentro de cuantos años se volverá a usar (Δ).

Año	ca	cn	Δ	Año	ca	cn	Δ	Año	ca	cn	Δ
2000*	SM	70	+28	2026	JD	47	+11	2052*	LV	15	+28
2001	LJ	14	+6	2027	VL	58	+11	2053	MS	36	+6
2002	KV	25	+11	2028*	SM	70	+28	2054	JD	47	+11
2003	MS	36	+11	2029	LJ	14	+6	2055	VL	58	+11
2004*	JL	48	+28	2030	KV	25	+11	2056*	SM	70	+28
2005	SK	69	+6	2031	MS	36	+11	2057	LJ	14	+6
2006	DM	03	+11	2032*	JL	48	+28	2058	KV	25	+11
2007	LJ	14	+11	2033	SK	69	+6	2059	MS	36	+11
2008*	KS	26	+28	2034	DM	03	+11	2060*	JL	48	+28
2009	JD	47	+6	2035	LJ	14	+11	2061	SK	69	+6
2010	VL	58	+11	2036*	KS	26	+28	2062	DM	03	+11
2011	SK	69	+11	2037	JD	47	+6	2063	LJ	14	+11
2012*	DJ	04	+28	2038	VL	58	+11	2064*	KS	26	+28
2013	KV	25	+6	2039	SK	69	+11	2065	JD	47	+6
2014	MS	36	+11	2040*	DJ	04	+28	2066	VL	58	+11
2015	JD	47	+11	2041	KV	25	+6	2067	SK	69	+11
2016*	VK	59	+28	2042	MS	36	+11	2068*	DJ	04	+28
2017	DM	03	+6	2043	JD	47	+11	2069	KV	25	+6
2018	LJ	14	+11	2044*	VK	59	+28	2070	MS	36	+11
2019	KV	25	+11	2045	DM	03	+6	2071	JD	47	+11
2020*	MD	37	+28	2046	LJ	14	+11	2072*	VK	59	+28
2021	VL	58	+6	2047	KV	25	+11	2073	DM	03	+6
2022	SK	69	+11	2048*	MD	37	+28	2074	LJ	14	+11
2023	DM	03	+11	2049	VL	58	+6	2075	KV	25	+11
2024*	LV	15	+28	2050	SK	69	+11	2076*	MD	37	+28
2025	MS	36	+6	2051	DM	03	+11	2077	VL	58	+6

TABLA 3. Códigos alfabético y numérico de los calendarios de los años 2000 al 2077.

Observando la tabla anterior podemos obtener las siguientes conclusiones:

1. Un calendario de años bisiestos, se usa solo una vez cada 28 años.
2. Un calendario de años no-bisiestos se usará 4 veces en un periodo de 28 años, con dos intervalos de 11 años y un intervalo de 6 años (note que 11+11+6=28).
3. Un calendario que se usa en un año congruente con i (mod 4) se usa también 28 años después, en otro año congruente con i (mod 4).
4. Un calendario que se usa en un año congruente con 1 (mod 4) (un año después de un bisiesto) se vuelve a usar dentro de 6 años.
5. Un calendario que se usa en un año congruente con 2 o con 3 (mod 4) (dos o tres años después de un bisiesto) se vuelve a usar dentro de 11 años.
6. La diferencia entre el número de calendario de un año A y el año A+4 es siempre congruente con 55 (mod 77).
7. La diferencia entre el número de calendario de un año bisiesto y el número de calendario del año siguiente es congruente con +21 (mod 77).
8. La diferencia entre el número de calendario de un año no-bisiesto y el que sigue (si este otro es también no-bisiesto) es congruente con +11 (mod 77).
9. La diferencia entre el número de calendario de un año no-bisiesto y el que sigue (si este otro es bisiesto) es congruente con + 12 (mod 77).

2.2. TRANSICIONES DE UN AÑO A OTRO

Usaremos la notación Δ_k para referirnos a la diferencia entre el número de calendario de un año congruente con k modulo 4 y el año anterior a él. El paso de un año al año siguiente, es decir la transición de un año al otro, puede ser de cuatro tipos:

TRANSICIÓN DE TIPO 0

Son las transiciones de un año $A_1 \equiv 3 \pmod 4$ a un año $A_2 \equiv 0 \pmod 4$ es decir, de un año no-bisiesto a uno bisiesto. Como el calendario de un año no-bisiesto tiene 365 días y como $365 \equiv 1 \pmod 7$, si el año A_1 empezaba en el día **a** su número de calendario será $C(A_1) = 11\,a + 3$. El siguiente año empezará en el día **a+1** y tendrá un calendario con número $C(A_2) = 11\,(a+1) + 4$. Su diferencia será:

$$\Delta_0 = (11\,(a+1)+4) - (11\,a+3) = \cancel{11\,a} + 11 + 4 - \cancel{11\,a} - 3 = 11 + 4 - 3 = 12$$

TRANSICIÓN DE TIPO 1

Son las transiciones de un año $A_1 \equiv 0 \pmod 4$ a un año $A_2 \equiv 1 \pmod 4$ es decir, de un año bisiesto a otro año no-bisiesto. Como el calendario de un año bisiesto tiene 366 días y como $366 \equiv 2 \pmod 7$, si el año A_1 empezaba en el día **a** su número de calendario será $C(A_1) = 11\,a + 4$. El año siguiente empezará en el día **a+2** y tendrá un calendario con número $C(A_2) = 11\,(a+2) + 3$. Su diferencia será:

$$\Delta_1 = (11\,(a+2)+3) - (11\,a+4) = \cancel{11\,a} + 22 + 3 - \cancel{11\,a} - 4 = 22 + 3 - 4 = 21$$

TRANSICIÓN DE TIPO 2

Son las transiciones de un año $A_1 \equiv 1 \pmod 4$ a un año $A_2 \equiv 2 \pmod 4$. Es decir, de un año no-bisiesto a otro año no-bisiesto. Como el calendario de un año no-bisiesto tiene 365 días y como $365 \equiv 1 \pmod 7$, si el año A_1 empezaba en el día **a** su número de calendario será $C(A_1) = 11\,a + 3$. El siguiente año empezará en el día **a+1** y tendrá un calendario con número $C(A_2) = 11\,(a+1) + 3$. La diferencia entre ambos será:

$$\Delta_2 = (11\,(a+1)+3) - (11\,a+3) = \cancel{11\,a} + 11 + 3 - \cancel{11\,a} - 3 = 11 + 3 - 3 = 11$$

TRANSICIÓN DE TIPO 3

Son transiciones similares a la anterior de un año $A_1 \equiv 2 \pmod 4$ a un año $A_2 \equiv 3 \pmod 4$. Son también transiciones de un año no-bisiesto a un año no-bisiesto. Como el calendario de un año no-bisiesto tiene 365 días y como $365 \equiv 1 \pmod 7$, si el año A_1 empezaba en el día a su número de calendario será $C(A_1) = 11\,a + 3$. El siguiente año empezará en el día **a+1** y tendrá un calendario con número $C(A_2) = 11\,(a+1) + 3$. La diferencia entre ambos será:

$$\Delta_3 = (11\,(a+1)+3) - (11\,a+3) = \cancel{11\,a} + 11 + 3 - \cancel{11\,a} - 3 = 11 + 3 - 3 = 11$$

Entonces en un bloque de 4 años, entre el año A_1 y el año A_1+4 hay una diferencia en el número de calendario, que llamaremos Δ, dada por:

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 21 + 11 + 11 + 12 = 55 \ \textit{unidades}$$

Si un año A_1 bisiesto empieza en el día número **a** y el próximo año bisiesto A_2 empieza en el día número a' entonces

$$C(A_2) = C(A_1) + 55$$

$$11\,a' + 4 = 11\,a + 4 + 55$$

$$11(a' - a) = 55$$

$$a' - a = \tfrac{55}{11} = 5 \equiv -2 \pmod 7$$

Esto se interpreta así:

Si un año bisiesto empieza en un día número a, el próximo año bisiesto empezará en un día número $a - 2$ es decir, dos días antes.

Por ejemplo, el 1° de Enero de 2000 fue un día Sábado y el 1° de Enero del 2004 fue un día Jueves.

2.3. REPETICIÓN DE LOS CALENDARIOS DE AÑOS BISIESTOS

A	$C(A) = [C(A-1) + \Delta_i]$ mod 77	ca	Δ	$\sum_i \Delta_i$	$(\sum_i \Delta_i)$ (mód 77)
2000	**70**	SM	Δ =55	55	55
2004	48	JL	Δ =55	110	33
2008	26	KS	Δ =55	165	11
2012	04	DJ	Δ =55	220	66
2016	59	VK	Δ =55	275	44
2020	37	MD	Δ =55	330	22
2024	15	LV	Δ =55	385	**0**
2028	**70**	SM			

TABLA 4. Después de 7 períodos de 4 años, se repite un calendario de años bisiestos.

La tabla 4 muestra que sumando 55 al número de calendario de un año bisiesto, este se repetirá después de sumarle siete veces ese número. Esto esta relacionado con el hecho de que 55z no es divisible por 77 cuando $1 \leq z \leq 6$, pero sí es divisible por 77 cuando z=7 pues $55 \cdot 7 = 5 \cdot 11 \cdot 7 = 5 \cdot 77$.

Como cada 4 años ocurre un incremento de 55 unidades en el número de calendario, se concluye que **cada 7· 4=28 años se repiten los calendarios de años bisiestos**.

2.4. REPETICIÓN DE LOS CALENDARIOS DE AÑOS NO-BISIESTOS

2.4.1. CALENDARIO USADO EN UN AÑO CONGRUENTE CON 1 MOD 4

	A	$C(A) = [C(A-1) + \Delta_i]$ mod 77	ca	Δ_i	$\sum_i \Delta_i$	$(\sum_i \Delta_i)$ (mód 77)
A_1	2001	**14**	LJ	Δ_2=11	11	11
	2002	25	KV	Δ_3=11	22	22
A_2	2003	36	MS	Δ_0=12	34	34
	2004	48	JL	Δ_1=21	55	55
	2005	69	SK	Δ_2=11	66	66
	2006	03	DM	Δ_3=11	77	**0**
A_3	2007	**14**	LJ			

TABLA 5. Después de 6 años, se repite un calendario usado en un año $A_1 \equiv 1 \pmod 4$

En la Tabla 5 vemos que el año A_1 está después de un año bisiesto.

Entonces dos años después se usará el calendario $C(A_2) = C(A_1) + \Delta_2 + \Delta_3 = C(A_1) + 22$

Cuatro años después de A_2 se usará el calendario $C(A_3) = C(A_2) + \Delta = C(A_2) + 55$

Entonces el número de calendario del año A_3 es

$$C(A_3) = C(A_1) + 22 + 55 = C(A_1) \pmod{77} = C(A_1) + 77 \equiv C(A_1) \pmod{77}$$

En la parte derecha de la tabla vemos que la suma acumulada de los incrementos asociados a cada transición, es congruente con 77 solo después de sumar seis transiciones y no antes.

Además como $(1 \pmod 4) + 6 = 1 + 6 = 7 \equiv 3 \pmod 4$ concluimos que si un año está después de un año bisiesto, **el calendario de ese año será usado seis años después, en un año que estará tres años después de un bisiesto**.

2.4.2. CALENDARIO USADO EN UN AÑO CONGRUENTE CON 2 MOD 4

	A	$C(A) = [C(A-1) + \Delta_i]$ mod 77	ca	Δ_i	$\sum_i \Delta_i$	$(\sum_i \Delta_i)$ (mód 77)
A_1	2002	**25**	KV	Δ_3 =11	11	11
	2003	36	MS	Δ_0 =12	23	23
	2004	48	JL	Δ_1 =21	44	44
A_2	2005	69	SK	Δ_2 =11	55	55
	2006	03	DM	Δ_3 =11	66	66
	2007	14	LJ	Δ_0 =12	78	1
	2008	26	KW	Δ_1 =21	99	22
	2009	47	JD	Δ_2 =11	110	33
	2010	58	VL	Δ_3 =11	121	44
	2011	69	SK	Δ_0 =12	133	56
	2012	04	DJ	Δ_1 =21	154	**0**
A_3	2013	**25**	KV			

TABLA 6. Después de 11 años, se repite un calendario usado en un año $A_1 \equiv 2 \pmod 4$

En la Tabla 6 vemos que el año A_1 esta dos años después de un año bisiesto.

Entonces tres años después se usará el calendario

$$C(A_2) = C(A_1) + \Delta_3 + \Delta_0 + \Delta_1 = C(A_1) + 11 + 12 + 21 = C(A_1) + 44$$

Ocho años después de A_2 se usará el calendario

$$C(A_3) = C(A_2) + 2 * \Delta = C(A_2) + 2 * 55 = C(A_2) + 110$$

Entonces el número de calendario del año A_3 es

$$C(A_3) = C(A_1) + 44 + 110 = C(A_1) + 154 \equiv C(A_1) \pmod{77}$$

En la parte derecha de la Tabla 6 vemos que la suma acumulada de los incrementos asociados a cada transición, es congruente con 77 solo después de sumar once transiciones y no antes.

Además como $(2 \pmod 4)) + 11 = 2 + 11 = 13 \equiv 1 \pmod 4$ concluimos que si un año está dos años después de un año bisiesto, **el calendario de ese año será usado once años después, en un año que estará un año después de un bisiesto**.

2.4.3. CALENDARIO USADO EN UN AÑO CONGRUENTE CON 3 MOD 4

	A	$C(A) = [C(A) + \Delta_i]$ mod 77	ca	Δ_i	$\sum_i \Delta_i$	$(\sum_i \Delta_i)$ (mód 77)
A_1	2003	**36**	MS	Δ_0 =12	12	12
	2004	48	JL	Δ_1 =21	33	33
	2005	69	SK	Δ_2 =11	44	44
A_2	2006	03	DM	Δ_3 =11	55	55
	2007	14	LJ	Δ_0 =12	67	67
	2008	26	KW	Δ_1 =21	88	11
	2009	47	JD	Δ_2 =11	99	22
	2010	58	VL	Δ_3 =11	110	33
	2011	69	SK	Δ_0 =12	122	45
	2012	04	DJ	Δ_1 =21	143	66
	2013	25	KV	Δ_2 =11	154	**0**
A_3	2014	**36**	MS			

TABLA 7. Después de 11 años, se repite un calendario usado en un año $A_1 \equiv 3 \pmod 4$

En la Tabla 7 vemos que el año A_1 esta tres años después de un año bisiesto.

Entonces tres años después se usará el calendario

$$C(A_2) = C(A_1) + \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 = C(A_1) + 44$$

Ocho años después de A_2 se usará el calendario

$$C(A_3) = C(A_2) + 2 * \Delta = C(A_2) + 2 * 55 = C(A_2) + 110$$

ya que hay dos bloques de cuatro años entre A_2 y A_3.

Entonces el número de calendario del año A_3 es

$$C(A_3) = C(A_1) + 44 + 110 = C(A_1) + 154 \equiv C(A_1) \pmod{77}$$

En la parte derecha de la Tabla 7 vemos que la suma acumulada de los incrementos asociados a cada transición, es congruente con 77 solo después de sumar once transiciones y no antes.

Además como $(3 \pmod 4) + 11 = 3 + 11 = 14 \equiv 2 \pmod 4$ concluimos que si un año está tres años después de un año bisiesto, **el calendario de ese año será usado once años después, en un año que estará dos años después de un bisiesto**.

2.5. BÚSQUEDA DE UNA ECUACIÓN MATEMÁTICA

A continuación deduciremos una ecuación matemática que relacionará el número de calendario de un año A_2 con el número de calendario de un año A_1 (anterior al año A_2).

Una función que llamaremos δ nos indicará si un año está 0, 1, 2 o 3 años después de un bisiesto. La definimos así:

$$\delta(A) = A \pmod 4$$

Es decir

$$\delta(A) = A - 4\left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor$$

Una función que llamaremos λ nos indicará si un año particular es bisiesto o no, pues la función devuelve un 1 si el valor del parámetro es divisible por 4 y devuelve un 0 si no es divisible por 4.

La definimos de la siguiente manera:

$$\lambda(A) = \left\lfloor \frac{4 - \delta(A)}{4} \right\rfloor$$

entonces

$$\lambda(A) = \left\lfloor \frac{4 - A + 4\left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor}{4} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \frac{A}{4} \right\rfloor$$

Podemos decir entonces que en un año A hay $365 + \lambda(A)$ días.

Ejemplo: Será bisiesto el año 2012?

Solución:$\lambda(2012) = \left\lfloor 1 + 4\left\lfloor \frac{2012}{4} \right\rfloor - \frac{2012}{4} \right\rfloor = \lfloor 1 + \lfloor 503 \rfloor - 503 \rfloor = 1$

Como $\lambda(2012) = 1$ el año 2012 sí es bisiesto. ∎

Ejemplo: Será bisiesto el año 2015?

Solución: $\lambda(2015) = \left\lfloor 1 + 4\left\lfloor \frac{2015}{4} \right\rfloor - \frac{2015}{4} \right\rfloor = \lfloor 1 + \lfloor 503 \rfloor - 503,75 \rfloor = \lfloor 1 - 0,75 \rfloor = \lfloor 0,25 \rfloor = 0$

Como $\lambda(2015) = 0$ el año 2015 no es bisiesto. ∎

La siguiente tabla nos muestra el valor que producen las funciones δ y λ para un período de 9 años consecutivos (del 2000 al 2008):

A	$\delta(A)$	$\delta(A)$	$\lambda(A)$
	$A - 4\left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor$	$4 - A + 4\left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{4-\delta(A)}{4} \right\rfloor$
2000*	0	4	1
2001	1	3	0
2002	2	2	0
2003	3	1	0
2004*	0	4	1
2005	1	3	0
2006	2	2	0
2007	3	1	0
2008*	0	4	1

TABLA 8. Valor que devuelven las funciones δ y λ y para los años 2000 al 2008.

Note que $A_2 - \delta(A_2)$ nos dice cuál es al año bisiesto anterior o igual al año A_2.

Similarmente $A_1 - \delta(A_1)$ nos dice cuál es al año bisiesto anterior o igual al año A_1.

Podemos definir entonces una función Ψ que cuente el **número de años bisiestos** que hay entre 2 años cualquiera (tomando en cuenta a ambos) de la siguiente manera:

$$\Psi(A_1, A_2) = \left\lfloor \frac{(A_2 - \delta(A_2)) - (A_1 - \delta(A_1))}{4} \right\rfloor + \lambda(A_1)$$

que podemos escribir:

$$\Psi(A_1, A_2) = \left\lfloor \frac{(A_2 - \delta(A_2)) - (A_1 - \delta(A_1))}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4 - \delta(A_1)}{4} \right\rfloor$$

$$\Psi(A_1, A_2) = \left\lfloor \frac{(A_2 - (A_2 \; mod \; 4)) - (A_1 - (A_1 \; mod \; 4))}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4 - (A_1 \; mod \; 4)}{4} \right\rfloor$$

$$\Psi(A_1, A_2) = \left\lfloor \frac{\left(A_2 - (A_2 - 4\left\lfloor \frac{A_2}{4} \right\rfloor)\right) - \left(A_1 - (A_1 - 4\left\lfloor \frac{A_1}{4} \right\rfloor)\right)}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4 - (A_1 - 4\left\lfloor \frac{A_1}{4} \right\rfloor)}{4} \right\rfloor$$

$$\Psi(A_1, A_2) = \left\lfloor \frac{4\left\lfloor \frac{A_2}{4} \right\rfloor - 4\left\lfloor \frac{A_1}{4} \right\rfloor}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4 + 4\left\lfloor \frac{A_1}{4} \right\rfloor - A_1}{4} \right\rfloor$$

$$\Psi(A_1, A_2) = \left\lfloor \frac{A_2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A_1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \left\lfloor \frac{A_1}{4} \right\rfloor - \frac{A_1}{4} \right\rfloor$$

Ejemplo: Cuantos años bisiestos hay entre el año 2000 y el año 2012?

Solución: Si $A_1 = 2000$ y $A_2 = 2012$ entonces

$\left\lfloor \frac{A_2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2012}{4} \right\rfloor = \lfloor 503 \rfloor = 503$

$\left\lfloor \frac{A_1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2000}{4} \right\rfloor = \lfloor 500 \rfloor = 500$

$\left\lfloor 1 + \left\lfloor \frac{A_1}{4} \right\rfloor - \frac{A_1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \left\lfloor \frac{2000}{4} \right\rfloor - \frac{2000}{4} \right\rfloor = \lfloor 1 + 500 - 500 \rfloor = 1$

$\Psi(2000, 2012) = 503 - 500 + 1 = 4$ ■

Ejemplo: Cuantos años bisiestos hay entre el año 1951 y el año 1975?

Solución: Si $A_1 = 1951$ y $A_2 = 1975$ entonces

$\lfloor \frac{A_2}{4} \rfloor = \lfloor \frac{1975}{4} \rfloor = \lfloor 493{,}75 \rfloor = 493$

$\lfloor \frac{A_1}{4} \rfloor = \lfloor \frac{1951}{4} \rfloor = \lfloor 487{,}75 \rfloor = 487$

$\lfloor 1 + \lfloor \frac{A_1}{4} \rfloor - \frac{A_1}{4} \rfloor = \lfloor 1 + \lfloor \frac{1951}{4} \rfloor - \frac{1951}{4} \rfloor = \lfloor 1 + 487 - 487{,}75 \rfloor = \lfloor 1 - 0{,}75 \rfloor = \lfloor 0{,}25 \rfloor = 0$

$\Psi(1951, 1975) = 493 - 487 + 0 = 6$ ■

Para un año particular A, si llamamos **a** al número del día correspondiente al 1° de Enero y llamamos C(A) al número de calendario correspondiente, entonces

$$C(A) = 10a + a + 3 + \lambda(A)$$

$$C(A) = 11a + 3 + \lambda(A) \tag{2}$$

Ejemplo: Cuál calendario se debe usar el año 2004 sabiendo que el primer día de ese año es un Jueves?

Solución:

$$\lambda(2004) = \left\lfloor 1 + 4\left\lfloor \frac{2004}{4} \right\rfloor - \frac{2004}{4} \right\rfloor = \lfloor 1 + \lfloor 501 \rfloor - 501 \rfloor = 1$$

Como el Jueves es el día número 4, entonces el número de calendario será:

$$C(2004) = 11 * 4 + 3 + \lambda(2004) = 11 * 4 + 3 + 1 = 48\ (JL)\ ■$$

El problema de encontrar una fórmula que nos de el número de calendario que se debe usar en el año A_2, si conocemos cuál fue el calendario que se usó en un año anterior A_1, se reduce a contar el número de transiciones de cada tipo que hay al pasar de un año al otro.

Pero sabemos que entre el año A_1 y el A_2 hay $\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \rfloor$ bloques de 4 años, en cada uno de los cuales hay un incremento de 55 unidades en el número de calendario.

Entonces el primer año que está después de esos bloques y que llamamos A_3 tiene como número de calendario:

$$C(A_3) = C(A_1) + 55\left\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor$$

El siguiente diagrama aclara todo esto:

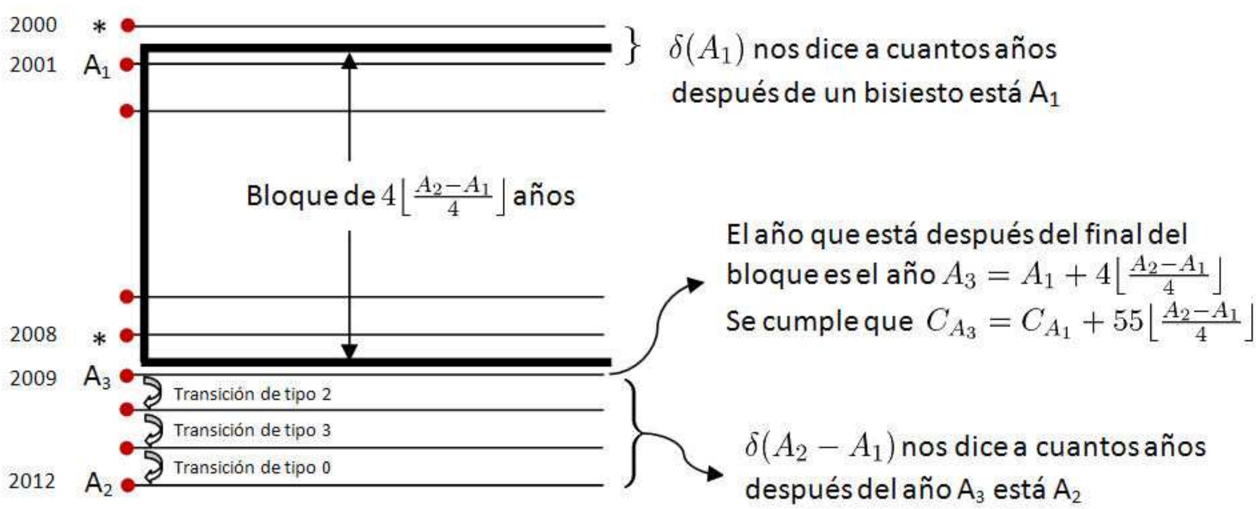

FIGURA 1. Representación gráfica de lo que significan $\delta(A_1)$, $\delta(A_2 - A_1)$ y $4\lfloor \frac{A_2-A_1}{4} \rfloor$.

Para simplificar le llamaremos i a $\delta(A_1)$ y le llamaremos j a $\delta(A_2 - A_1)$. Vemos que

$$C(A_2) = C(A_1) + 55 \left\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor + N \tag{3}$$

Donde el valor de N depende de $\delta(A_1)$ y de $\delta(A_2 - A_1)$ es decir $N = N(i, j)$ y no es otra cosa que la diferencia entre el número de calendario del año A_2 y el A_3:

$$N(i, j) = C(A_2) - C(A_3)$$

El valor de $N(i, j)$ se obtiene al tener en cuenta cuantas transiciones y de que tipo, hay para pasar del año A_3 al año A_2. Cuál es la primera transición después del año A_3 depende del valor de $\delta(A_1)$. Cuantas transiciones (cuantos años) hay entre A_3 y A_2 es precisamente el valor de $\delta(A_2 - A_1)$.

La siguiente tabla muestra todas las posibilidades:

N(i,j)		$j = \delta(A_2 - A_1)$			
		0	1	2	3
$i = \delta(A_1)$	0	0	Δ_1	$\Delta_1 + \Delta_2$	$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$
	1	0	Δ_2	$\Delta_2 + \Delta_3$	$\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_0$
	2	0	Δ_3	$\Delta_3 + \Delta_0$	$\Delta_3 + \Delta_0 + \Delta_1$
	3	0	Δ_0	$\Delta_0 + \Delta_1$	$\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2$

TABLA 9. Transiciones que hay que tomar en cuenta para calcular el valor de N en función de los valores de $\delta(A_1)$ y de $\delta(A_2 - A_1)$

Los valores de N correspondientes son entonces los mostrados en la siguiente tabla:

N(i,j)		$j = \delta(A_2 - A_1)$			
		0	1	2	3
$i = \delta(A_1)$	0	0	21	32	43
	1	0	11	22	34
	2	0	11	23	44
	3	0	12	33	44

TABLA 10. Valor de N en función de los valores de $\delta(A_1)$ y de $\delta(A_2 - A_1)$

Ahora debemos encontrar una fórmula matemática que nos de los valores de N en función de los valores de $\delta(A_1)$ y de $\delta(A_2 - A_1)$.

Si hacemos que N sea igual a $11 * \delta(A_2 - A_1) + M$ tendremos que

$$M = N - 11 * \delta(A_2 - A_1) \tag{4}$$

La tabla asociada a los valores de M es:

M(i,j)		$j = \delta(A_2 - A_1)$			
		0	1	2	3
$i = \delta(A_1)$	0	0	10	10	10
	1	0	0	0	1
	2	0	0	1	11
	3	0	1	11	11

TABLA 11. Valor de M en función de los valores de $\delta(A_1)$ y de $\delta(A_2 - A_1)$

Trabajando matricialmente, vemos que la matriz asociada a M es:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces M es la suma de las matrices A, B y C con:

$$A = 10 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = 10 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como cero es un múltiplo de cuatro, $\lambda(i)$ devolverá un 1 si i=0 y devolverá un 0 si $i \in \{1, 2, 3\}$.

Por otro lado $1 - \lambda(j)$ tendrá un valor de 0 si j=0 y tendrá un valor de 1 si $j \in \{1, 2, 3\}$.

Entonces podemos generar la matriz A así: $\quad a_{i,j} = 10 \cdot \lambda(i) \cdot (1 - \lambda(j))$

A las matrices B y C las podemos generar con las siguientes fórmulas:

$$b_{i,j} = \left\lfloor \frac{i+j}{4} \right\rfloor$$

$$c_{i,j} = 10 \left\lfloor \frac{i+j}{5} \right\rfloor$$

Por la ecuación (4) tenemos que $N = M + 11 * j$ por lo cual podemos escribir la ecuación (3) así:

$$C(A_2) = C(A_1) + 55 \left\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor + M + 11 * j$$

con

$$M = 10 \cdot \lambda(i) \cdot (1 - \lambda(j)) + \left\lfloor \frac{i+j}{4} \right\rfloor + 10 \left\lfloor \frac{i+j}{5} \right\rfloor$$

entonces la ecuación que estabamos buscando es:

$$\boxed{C(A_2) = C(A_1) + 55 \left\lfloor \tfrac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor + 10 \cdot \lambda(i) \cdot (1 - \lambda(j)) + \left\lfloor \tfrac{i+j}{4} \right\rfloor + 10 \left\lfloor \tfrac{i+j}{5} \right\rfloor + 11 * j} \tag{5}$$

A continuación expresaremos la ecuación anterior con relación a los valores de A_1 y de A_2.

$$\begin{aligned} C(A_2) =& C(A_1) + 55 \left\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor + 10 \cdot \lambda(\delta(A_1)) \cdot (1 - \lambda(\delta(A_2 - A_1))) + \\ & \left\lfloor \frac{\delta(A_1) + \delta(A_2 - A_1)}{4} \right\rfloor + 10 \left\lfloor \frac{\delta(A_1) + \delta(A_2 - A_1)}{5} \right\rfloor + 11 \cdot \delta(A_2 - A_1) \end{aligned}$$

Se puede demostrar fácilmente que $\lambda(\delta(A)) = \lambda(A)$ y entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} C(A_2) =& C(A_1) + 55 \left\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor + 10 \cdot \lambda(A_1) \cdot (1 - \lambda(A_2 - A_1)) \\ & + \left\lfloor \frac{\delta(A_1) + \delta(A_2 - A_1)}{4} \right\rfloor + 10 \left\lfloor \frac{\delta(A_1) + \delta(A_2 - A_1)}{5} \right\rfloor + 11 * \delta(A_2 - A_1) \end{aligned}$$

A la ecuación anterior la podemos expresar de la siguiente manera, que llamaremos **la ecuación fundamental de los calendarios**:

$$\boxed{\begin{aligned}C(A_2) = {} & C(A_1) + 55\left\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor + 10 \cdot \left\lfloor 1 - \frac{A_1 \mod 4}{4} \right\rfloor \cdot \left(1 - \left\lfloor 1 - \frac{(A_2 - A_1) \mod 4}{4} \right\rfloor\right) + \\ & \left\lfloor \frac{(A_1 \mod 4) + ((A_2 - A_1) \mod 4)}{4} \right\rfloor + 10\left\lfloor \frac{(A_1 \mod 4) + ((A_2 - A_1) \mod 4)}{5} \right\rfloor + \\ & 11 \cdot ((A_2 - A_1) \mod 4)\end{aligned}} \tag{6}$$

Podemos simplificarla si consideramos cuatro casos separados:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Caso 1: } A_1 \text{ y } A_2 \text{ son bisiestos:} \\ C(A_2) = C(A_1) + 55\left\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor \\ \text{Caso 2: } A_1 \text{ es bisiesto y } A_2 \text{ no lo es:} \\ C(A_2) = C(A_1) + 55\left\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor + 10 + 11 \cdot (A_2 \mod 4) \\ \text{Caso 3: } A_2 \text{ es bisiesto y } A_1 \text{ no lo es:} \\ C(A_2) = C(A_1) + 55\left\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor + 1 + 11 \cdot (4 - (A_1 \mod 4)) \\ \text{Caso 4: } A_1 \text{ no es bisiesto y } A_2 \text{ no es bisiesto:} \\ C(A_2) = C(A_1) + 55\left\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(A_1 \mod 4) + ((A_2 - A_1) \mod 4)}{4} \right\rfloor + \\ \qquad 10\left\lfloor \frac{(A_1 \mod 4) + ((A_2 - A_1) \mod 4)}{5} \right\rfloor + 11 \cdot ((A_2 - A_1) \mod 4)\end{array}} \tag{7}$$

Podemos decir entonces que el valor de N está dado por:

$$\boxed{\begin{aligned}N = {} & 10 \cdot \left\lfloor 1 - \frac{A_1 \mod 4}{4} \right\rfloor \cdot \left(1 - \left\lfloor 1 - \frac{(A_2 - A_1) \mod 4}{4} \right\rfloor\right) + \\ & \left\lfloor \frac{(A_1 \mod 4) + ((A_2 - A_1) \mod 4)}{4} \right\rfloor + 10\left\lfloor \frac{(A_1 \mod 4) + ((A_2 - A_1) \mod 4)}{5} \right\rfloor + \\ & 11 \cdot ((A_2 - A_1) \mod 4)\end{aligned}} \tag{8}$$

Para cada uno de los casos, los valores de N están dados por:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Caso 1: } A_1 \text{ y } A_2 \text{ son bisiestos:} \\ \qquad N = 0 \\ \text{Caso 2: } A_1 \text{ es bisiesto y } A_2 \text{ no lo es:} \\ \qquad N = 10 + 11 \cdot (A_2 \mod 4) \\ \text{Caso 3: } A_2 \text{ es bisiesto y } A_1 \text{ no lo es:} \\ \qquad N = 1 + 11 \cdot (4 - (A_1 \mod 4)) \\ \text{Caso 4: } A_1 \text{ no es bisiesto y } A_2 \text{ no es bisiesto:} \\ \qquad N = \left\lfloor \frac{(A_1 \mod 4) + ((A_2 - A_1) \mod 4)}{4} \right\rfloor + \\ \qquad\quad 10\left\lfloor \frac{(A_1 \mod 4) + ((A_2 - A_1) \mod 4)}{5} \right\rfloor + 11 \cdot ((A_2 - A_1) \mod 4)\end{array}} \tag{9}$$

Usando cualquiera de las ecuaciones, de la (3) a la (9), podemos encontrar el código numérico del calendario que se debe usar en el año A_2, si conocemos el código numérico del calendario usado en el año A_1.

Ejemplo: Si en el año 2003 se usa el calendario número 36, cual calendario se utilizará en el año 2018?
Solución:

Utilizaremos los siguientes tres métodos para resolver el problema:

Método 1: Utilizando la ecuación (3) y los valores dados por la Tabla 10.

Método 2: Utilizando la ecuación (5).

Método 3: Utilizando el Caso 4 de la ecuación (9).

Utilizaremos los tres métodos para resolverlo.

Tenemos que
$$\left\{\begin{array}{c} A_1 = 2003, A_2 = 2018, \\ z = \left\lfloor \dfrac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{2018-2003}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{15}{4} \right\rfloor = 3 \\ i = \delta(A_1) = 2003 - 4\left\lfloor \dfrac{2003}{4} \right\rfloor = 2003 - 4 \cdot 500 = 2003 - 2000 = 3 \\ j = \delta(A_2 - A_1) = 15 - 4\left\lfloor \dfrac{15}{4} \right\rfloor = 15 - 4 \cdot 3 = 15 - 12 = 3 \\ \lambda(3) = \left\lfloor \dfrac{4-3}{4} \right\rfloor = \lfloor 0{,}25 \rfloor = 0 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Método 1: $\qquad C(A_2) = C(A_1) + 55\left\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor + N$

Según la Tabla 10 debemos usar el valor de N=44:

$$C(A_2) = 36 + 55 \cdot 3 + 44 = 245 \equiv 14 \pmod{77}$$

Entonces en el año 2018 se debe usar el calendario número 14 (LJ) $\blacksquare$

Método 2: Sustituyendo los valores dados en (10) en la ecuación (5) obtenemos:

$$C(2018) = 36 + 55 \cdot 3 + 10 \cdot \lambda(3) \cdot (1 - \lambda\,(3)) + \left\lfloor \frac{3+3}{4} \right\rfloor + 10\left\lfloor \frac{3+3}{5} \right\rfloor + 11 * 3$$

$$C(2018) = 36 + 165 + 10 \cdot 0 \cdot (1-0) + 1 + 10 \cdot 1 + 33$$

$$C(2018) = 36 + 165 + 1 + 10 + 33$$

$$C(2018) = 245 \equiv 14 \pmod{77}$$

$$C(2018) = 14\ (LJ) \ \blacksquare$$

Método 3: Sustituyendo los valores dados en (10) en la ecuación (9, Caso 4) obtenemos:

$$C(2018) = 36 + 11 \cdot 3 + \lfloor 504{,}5 - 500 - 3 \rfloor + 10\left\lfloor \frac{-4}{5} \cdot 500 + \frac{2018}{5} - \frac{4}{5} \cdot 3 \right\rfloor + 11 \cdot (2018 - 2003)$$

$$C(2018) = 36 + 33 + 1 + 10\lfloor -400 + 403{,}6 - 2{,}4 \rfloor + 11 \cdot 15$$

$$C(2018) = 69 + 0 + 1 + 10\lfloor 1{,}2 \rfloor + 165$$

$$C(2018) = 245 \equiv 14 \pmod{77}$$

$$C(2018) = 14\ (LJ) \ \blacksquare$$

2.6. DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DIOFÁNTICAS [2]

Como una comprobación de que las ecuaciones (8) están correctas y como un ejercicio para que el lector se familiarice con la simplificación de expresiones como esa, vamos a seguir el proceso inverso al que seguimos para deducirla: obtener las 16 ecuaciones diofánticas correspondientes a todos los casos asociados al producto cartesiano: $(A_1 \bmod 4) \times (A_2 \bmod 4)$. El análisis y la interpretación que le daremos a esas ecuaciones diofánticas nos permitirá comprender el comportamiento repetitivo de los calendarios.

Por (3) vemos que las ecuaciones diofánticas de los calendarios son de la forma:

$C(A_2) = C(A_1) + 55\,z(i,j) + N(i,j) \quad con\ z = \left\lfloor \frac{A_2 - A_1}{4} \right\rfloor$

Podemos usar esta ecuación para hallar:

1) CUAL CALENDARIO SE DEBE USAR EN UN AÑO A_2 DADOS A_1 y C(A_1)

Cuando usemos dicha ecuación para encontrar el valor de $C(A_2)$ conociendo los valores de A_1, de C(A_1) y de A_2, podríamos decir que la ecuación es una ecuación diofántica en una variable, donde la incógnita es el valor de $C(A_2)$ y las cantidades z y N son enteros conocidos.

2) CUÁNDO SE VOLVERÁ A USAR EL CALENDARIO USADO EL AÑO A_1

Cuando usemos dicha ecuación para encontrar cuál es el año más próximo A_2 en el que se volverá a usar el mismo calendario que se usó el año A_1, la ecuación será de la forma:
$C(A_2) - C(A_1) - 55\,z(i,j) = N(i,j)$

Pero el calendario usado en el año A_1 se vuelve a usar en el año A_2 solo si ocurre que

$$C(A_2) - C(A_1) \equiv 0 \pmod{77}.$$

Entonces la ecuación tendrá la forma: $77\,k - 55\,z = N(i,j)$ que es una ecuación diofántica en dos variables, donde las incógnitas son z y k.

Utilizaremos el siguiente algoritmo, para resolver las ecuaciones diofanticas y encontrar los períodos de repetición del calendario usado en una año congruente con $i \bmod 4$, para cada $i \in \{0,1,2,3\}$:

Algoritmo 1:

Para resolver las ecuaciones diofánticas y hallar los períodos de repetición de los calendarios.

- Para cada valor de $i \in \{0,1,2,3\}$:
  - ◇ Para cada valor de $j \in \{0,1,2,3\}$ halle el valor de N con las fórmulas (9):
    - * Si $N(i,j)$ es divisible por 11
      - △ Incremente el valor de z a partir de 1,
        hasta encontrar un valor de k tal que $77\,k = 55\,z + N$.
      - △ Calcule el período de repetición $P(i,j)$ con la fórmula:
        $$P = 4 \cdot z + [(A_2 - A_1) \pmod 4]\ \text{años}^{3} \qquad (11)$$
    - * Si no es divisible por 11 haga $P(i,j) = \infty$
- El menor período de repetición del calendario usado en un año $A_1 \equiv i \pmod 4$ será:
  $$P(i) = Min\,\{P(i,j)\ /\ j \in \{0,1,2,3\}\} \qquad (12)$$
- El próximo año en que se usará el mismo calendario que se usó el año A_1 será:
  $$A_2 = A_1 + P(A_1 \ (\text{mód } 4))$$

[2] Una información muy completa sobre ecuaciones diofánticas y sus métodos de resolución aparece en [1] Cap. 2 y también en [3] Cap. 4.

[3] Ya que $P = A_2 - A_1 = 4z + (A_2 - A_1) - 4z = 4z + [(A_2 - A_1) \bmod 4]$.

A continuación deduciremos las 16 ecuaciones diofánticas, utilizando el Algoritmo 1.

CASO (0,j): EL AÑO A_1 ES BISIESTO

Si el año A_1 es bisiesto, tendremos que $A_1 \equiv 0 \pmod 4$

SUBCASO (0,0): EL AÑO A_2 ES BISIESTO

Si A_2 es bisiesto, según el Caso 1 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = 0$

Interpretación: Esta ecuación diofántica sí tiene solución pues $mcd\,(77, 55)\,|0$. Cuando $z = 7$ y $k = 5$ ocurre que $77 \cdot 5 - 55 \cdot 7 = 0$. Según la fórmula (14), el período de repetición para este caso es: $P(0, 0) = 7 * 4 = 28$ años. Un ejemplo es el calendario 70 (SM) usado el año 2000, que se usa también en el año 2028.

SUBCASO (0,1): EL AÑO A_2 ESTÁ UN AÑO DESPUÉS DE UN BISIESTO

Tenemos que $A_2 \equiv 1 \pmod 4$ y según el Caso 2 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = 10 + 11 * 1$

$77\,k - 55\,z = 21$

Interpretación: Esta ecuación diofántica no tiene solución pues $mcd\,(77, 55) \nmid 21$. Según (14) el período de repetición será: $P(0, 1) = \infty$

SUBCASO (0,2): EL AÑO A_2 ESTÁ DOS AÑOS DESPUÉS DE UN BISIESTO

Tenemos que $A_2 \equiv 2 \pmod 4$ y según el Caso 2 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = 10 + 11 * 2$

$77\,k - 55\,z = 32$

Interpretación: Esta ecuación diofántica no tiene solución pues $mcd\,(77, 55) \nmid 32$. Según (14) el período de repetición será:$P(0, 2) = \infty$

SUBCASO (0,3): EL AÑO A_2 ESTÁ TRES AÑOS DESPUÉS DE UN BISIESTO

Tenemos que $A_2 \equiv 3 \pmod 4$ y según el Caso 2 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = 10 + 11 * 3$

$77\,k - 55\,z = 43$

Interpretación: Esta ecuación diofántica no tiene solución pues $mcd\,(77, 55) \nmid 43$. Según (14) el período de repetición será:$P(0, 3) = \infty$.

CASO (1,j): EL AÑO A_1 ESTÁ UN AÑO DESPUÉS DE UN BISIESTO

Si el año A_1 está un año después de un bisiesto, entonces $A_1 \equiv 1 \pmod 4$.

SUBCASO (1,0): EL AÑO A_2 ES UN AÑO BISIESTO

Si A_2 es bisiesto según el Caso 3 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = 1 + 11 \cdot (4 - 1)$

$77\,k - 55\,z = 34$

Interpretación: Esta ecuación diofántica no tiene solución pues $mcd\,(77, 55) \nmid 34$. Según (14) el período de repetición será: $P(1, 0) = \infty$

SUBCASO (1,1): EL AÑO A_2 ESTÁ UN AÑO DESPUÉS DE UN BISIESTO

Si $A_2 \equiv 1 \pmod 4$ entonces $(A_2 - A_1) \equiv (1-1) \pmod 4 \equiv 0 \pmod 4$.

Según el Caso 4 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = \lfloor \frac{1+0}{4} \rfloor + 10 \cdot \lfloor \frac{1+0}{5} \rfloor + 11 \cdot 0$

$77\,k - 55\,z = 0 + 10 \cdot 0 + 0$

$77\,k - 55\,z = 0$

Interpretación: Esta ecuación diofántica sí tiene solución pues $mcd\,(77, 55) \mid 0$. Cuando $z = 7$ y $k = 5$ ocurre que $77 \cdot 5 - 55 \cdot 7 = 0$. Según (14), el período de repetición para este caso es: $P(1,1) = 4 * 7 + 0 = 28$ años. Un ejemplo es el calendario 69 (SK) usado el año 2005, que se usa también en el año 2033.

SUBCASO (1,2): EL AÑO A_2 ESTÁ DOS AÑOS DESPUÉS DE UN BISIESTO

Si $A_2 \equiv 2 \pmod 4$ entonces $(A_2 - A_1) \equiv (2-1) \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$.

Según el Caso 4 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = \lfloor \frac{1+1}{4} \rfloor + 10 \cdot \lfloor \frac{1+1}{5} \rfloor + 11 \cdot 1$

$77\,k - 55\,z = 0 + 10 \cdot 0 + 11$

$77\,k - 55\,z = 11$

Interpretación: Esta ecuación diofántica sí tiene solución pues $mcd\,(77, 55) \mid 11$. Cuando $z = 4$ y $k = 3$ ocurre que $77 \cdot 3 - 55 \cdot 4 = 11$. Según (14), el período de repetición para este caso es: $P(1,2) = 4 * 4 + 1 = 17$ años. Un ejemplo es el calendario 69 (SK) usado el año 2005, que se usa también en el año 2022.

SUBCASO (1,3): EL AÑO A_2 ESTÁ TRES AÑOS DESPUÉS DE UN BISIESTO

Si $A_2 \equiv 3 \pmod 4$ entonces $(A_2 - A_1) \equiv (3-1) \pmod 4 \equiv 2 \pmod 4$.

Según el Caso 4 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = \lfloor \frac{1+2}{4} \rfloor + 10 \cdot \lfloor \frac{1+2}{5} \rfloor + 11 \cdot 2$

$77\,k - 55\,z = 0 + 10 \cdot 0 + 22$

$77\,k - 55\,z = 22$

Interpretación: Esta ecuación diofántica sí tiene solución pues $mcd\,(77, 55) \mid 22$. Cuando $z = 1$ y $k = 1$ ocurre que $77 \cdot 1 - 55 \cdot 1 = 22$. Según (14), el período de repetición para este caso es: $P(1,3) = 4 * 1 + 2 = 6$ años. Un ejemplo es el calendario 69 (SK) usado el año 2005, que se usa también en el año 2011.

CASO (2,j): EL AÑO A_1 ESTÁ DOS AÑOS DESPUÉS DE UN BISIESTO

Si el año A_1 está dos años después de un bisiesto entonces $A_1 \equiv 2 \pmod 4$.

SUBCASO (2,0): EL AÑO A_2 ES UN AÑO BISIESTO

Si A_2 es bisiesto según el Caso 3 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = 1 + 11 \cdot (4-2)$

$77\,k - 55\,z = 1 + 22$

$77\,k - 55\,z = 23$

Interpretación: Esta ecuación diofántica no tiene solución pues $mcd\,(77, 55) \nmid 23$. Según (14) el período de repetición será: $P(2,0) = \infty$.

SUBCASO (2,1): EL AÑO A_2 ESTÁ UN AÑO DESPUÉS DE UN BISIESTO

Si $A_2 \equiv 1 \pmod 4$ entonces $A_2 - A_1 \equiv (1-2) \pmod 4 \equiv -1 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$.

Según el Caso 4 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = \left\lfloor \frac{2+3}{4} \right\rfloor + 10 \cdot \left\lfloor \frac{2+3}{5} \right\rfloor + 11 \cdot 3$

$77\,k - 55\,z = 1 + 10 * 1 + 11 * 3$

$77\,k - 55\,z = 44$

Interpretación: Esta ecuación diofántica sí tiene solución pues $mcd\,(77,55) \mid 44$. Cuando $z = 2$ y $k = 2$ ocurre que $77 \cdot 2 - 55 \cdot 2 = 44$. Según (14), el período de repetición para este caso es: $P(2,1) = 4 * 2 + 3 = 11$ años. Un ejemplo es el calendario 03 (DM) usado el año 2006, que se usa también en el año 2017.

SUBCASO (2,2): EL AÑO A_2 ESTÁ DOS AÑOS DESPUÉS DE UN BISIESTO

Si $A_2 \equiv 2 \pmod 4$ entonces $A_2 - A_1 \equiv (2-2) \pmod 4 \equiv 0 \pmod 4$.

Según el Caso 4 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = \left\lfloor \frac{2+0}{4} \right\rfloor + 10 \cdot \left\lfloor \frac{2+0}{5} \right\rfloor + 11 \cdot 0$

$77\,k - 55\,z = 0 + 10 \cdot 0 + 0$

$77\,k - 55\,z = 0$

Interpretación: Esta ecuación diofántica sí tiene solución pues $mcd\,(77,55) \mid 0$. Cuando $z = 7$ y $k = 5$ ocurre que $77 \cdot 5 - 55 \cdot 7 = 0$. Según (14), el período de repetición para este caso es: $P(2,2) = 4 * 7 + 0 = 28$ años. Un ejemplo es el calendario 03 (DM) usado el año 2006, que se usa también en el año 2034.

SUBCASO (2,3): EL AÑO A_2 ESTÁ TRES AÑOS DESPUÉS DE UN BISIESTO

Si $A_2 \equiv 3 \pmod 4$ entonces $(A_2 - A_1) \equiv (3-2) \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$.

Según el Caso 4 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = \left\lfloor \frac{2+1}{4} \right\rfloor + 10 \cdot \left\lfloor \frac{2+1}{5} \right\rfloor + 11 \cdot 1$

$77\,k - 55\,z = 0 + 10 \cdot 0 + 11$

$77\,k - 55\,z = 11$

Interpretación: Esta ecuación diofántica sí tiene solución pues $mcd\,(77,55) \mid 11$. Cuando $z = 4$ y $k = 3$ ocurre que $77 \cdot 3 - 55 \cdot 4 = 11$. Según (14), el período de repetición para este caso es: $P(2,3) = 4 * 4 + 1 = 17$ años. Un ejemplo es el calendario 03 (DM) usado el año 2006, que se usa también en el año 2023.

CASO (3,j): EL AÑO A_1 ESTÁ TRES AÑOS DESPUÉS DE UN BISIESTO

Si el año A_1 está tres años después de un bisiesto, entonces $A_1 \equiv 3 \pmod 4$.

SUBCASO (3,0): EL AÑO A_2 ES UN AÑO BISIESTO

Si A_2 es bisiesto entonces $(A_2 - A_1) \equiv (0-3) \pmod 4 \equiv -3 \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$.

Según el caso 3 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = 1 + 11 \cdot (4-3)$

$77\,k - 55\,z = 1 + 11 \cdot 1$

$77\,k - 55\,z = 12$

Interpretación: Esta ecuación diofántica no tiene solución pues $mcd\,(77,55) \nmid 12$. Según (14) el período de repetición será: $P(3,0) = \infty$.

SUBCASO (3,1): EL AÑO A_2 ESTÁ UN AÑO DESPUÉS DE UN BISIESTO

Si $A_2 \equiv 1 \pmod 4$ entonces $A_2 - A_1 \equiv (1-3) \pmod 4 \equiv -2 \pmod 4 \equiv 2 \pmod 4$.

Según el caso 4 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = \left\lfloor \frac{3+2}{4} \right\rfloor + 10 \cdot \left\lfloor \frac{3+2}{5} \right\rfloor + 11 \cdot 2$

$77\,k - 55\,z = 1 + 10 \cdot 1 + 22$

$77\,k - 55\,z = 33$

Interpretación: Esta ecuación diofántica sí tiene solución pues $mcd\,(77,55) \mid 33$. Cuando $z = 5$ y $k = 4$ ocurre que $77 \cdot 4 - 55 \cdot 5 = 33$. Según (14), el período de repetición para este caso es: $P(3,1) = 4 * 5 + 2 = 22$ años. Por ejemplo, el calendario 36 (MS) usado el año 2003, que se usa también en el año 2025.

SUBCASO (3,2): EL AÑO A_2 ESTÁ DOS AÑOS DESPUÉS DE UN BISIESTO

Si $A_2 \equiv 2 \pmod 4$ entonces $(A_2 - A_1) \equiv (2-3) \pmod 4 \equiv -1 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$.

Según el caso 4 de (9)la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = \left\lfloor \frac{3+3}{4} \right\rfloor + 10 \cdot \left\lfloor \frac{3+3}{5} \right\rfloor + 11 \cdot 3$

$77\,k - 55\,z = 1 + 10 \cdot 1 + 33$

$77\,k - 55\,z = 44$

Interpretación: Esta ecuación diofántica sí tiene solución pues $mcd\,(77,55) \mid 44$. Cuando $z = 2$ y $k = 2$ ocurre que $77 \cdot 2 - 55 \cdot 2 = 44$. Según (14), el período de repetición para este caso es: $P(3,2) = 4 * 2 + 3 = 11$ años. Un ejemplo es el calendario 47 (JD) usado el año 2015, que se usa también en el año 2026.

SUBCASO (3,3): EL AÑO A_2 ESTÁ TRES AÑOS DESPUÉS DE UN BISIESTO

Si $A_2 \equiv 3 \pmod 4$ entonces $(A_2 - A_1) \equiv (3-3) \pmod 4 \equiv 0 \pmod 4$.

Según el Caso 4 de (9) la ecuación diofántica correspondiente es:

$77\,k - 55\,z = \left\lfloor \frac{3+0}{4} \right\rfloor + 10 \cdot \left\lfloor \frac{3+0}{5} \right\rfloor + 11 \cdot 0$

$77\,k - 55\,z = 0 + 10 \cdot 0 + 0$

$77\,k - 55\,z = 0$

Interpretación: Esta ecuación diofántica sí tiene solución pues $mcd\,(77,55) \mid 0$. Cuando $z = 7$ y $k = 5$ ocurre que $77 \cdot 5 - 55 \cdot 7 = 0$. Según (14), el período de repetición para este caso es: $P(3,3) = 4 * 7 + 0 = 28$ años. Un ejemplo es el calendario 69 (SK) usado el año 2011, que se usa también en el año 2039.

3. CONCLUSIONES

Vimos que las ecuaciones diofánticas relacionadas con la repetición de los calendarios son de la forma:

$$77\,k - 55\,z = N \tag{13}$$

donde los valores de N dependen de A_1 y de A_2.

Según el análisis de casos realizado en las páginas anteriores, los valores de N son los mostrados en la siguiente tabla:

N		A_2 (mód 4)			
		0	1	2	3
A_1 (mód 4)	0	0	21	32	43
	1	34	0	11	22
	2	23	44	0	11
	3	12	33	44	0

TABLA 12. Valor de N en función de los valores de A_1 y de A_2.

Podemos obtener también la tabla anterior a partir de la Tabla 10, teniendo en cuenta que

$$A_2 \text{ mód } 4 = \{\ [\ (A_2 - A_1) \text{ mód } 4\ ] + (A_1 \text{ mód } 4)\ \} \text{ mód } 4$$

La ecuación diofántica (17) tiene solución sólo cuando $mcd\,(77, 55)|\,N$, es decir cuando 11 divide a N.

La interpretación de los valores de N, mostrados en la Tabla 12, es la siguiente:

Los valores de la parte superior derecha (21, 32 y 43) no son divisibles por 11. Eso se interpreta como:

> **un calendario usado en un año bisiesto no puede usarse en un año no-bisiesto**.

Los valores de la parte inferior izquierda de la tabla (34, 23 y 12) no son divisibles por 11. Eso se interpreta como:

> **un calendario usado en un año no-bisiesto no puede usarse en un año bisiesto**.

El valor igual a cero de la parte superior izquierda de la tabla, es divisible por 11. Eso se interpreta como:

> **un calendario usado en un año bisiesto puede usarse en otro año bisiesto**.

En general, los valores iguales a cero en la diagonal de la tabla, se interpretan como:

> **un calendario usado en un año congruente con i_0 mod 4 puede usarse en otro año congruente con i_0 mod 4.**

Los nueve valores de la parte inferior derecha de la tabla, son divisibles todos por 11. Eso se interpreta como:

> **un calendario usado en un año no-bisiesto puede usarse en otro año no-bisiesto**.

Los períodos de repetición P de los calendarios aparecen en la siguiente tabla:

P		A_2 (mód 4)				Min
		0	1	2	3	
A_1 (mód 4)	0	28	∞	∞	∞	28
	1	∞	28	17	6	6
	2	∞	11	28	17	11
	3	∞	22	11	28	11

TABLA 13. Períodos de repetición de los calendarios en función de A_1 y de A_2.

La columna de la derecha de esta tabla se obtiene al aplicar la fórmula (15) del algoritmo, a los datos de cada fila.

La interpretación de los valores de P, mostrados en la Tabla 13, es la siguiente:

Los valores de P infinitos se interpretan como:

> **Nunca puede ocurrir que un calendario, de un año bisiesto, se vuelva a usar en un año no-bisiesto**.
>
> **Nunca puede ocurrir que un calendario, de un año no-bisiesto, se vuelva a usar en un año bisiesto**.

Los valores iguales a 28 en la diagonal se interpretan como:

> **Deben pasar 28 años para que un calendario, de un año congruente con i_0 mod 4, se vuelva a usar en otro año congruente con i_0 mod 4**.

Los valores iguales a 17 se interpretan como:

> **Deben pasar 17 años para que un calendario, de un año que está un año después de un bisiesto, se vuelva a usar en un año que está dos años después de un bisiesto.**
>
> **Deben pasar 17 años para que un calendario, de un año que está dos años después de un bisiesto, se vuelva a usar en un año que está tres años después de un bisiesto.**

Los valores iguales a 11 se interpretan como:

> **Deben pasar 11 años para que un calendario, de un año que está dos años después de un bisiesto, se vuelva a usar en un año que está un año después de un bisiesto.**
>
> **Deben pasar 11 años para que un calendario, de un año que está tres años después de un bisiesto, se vuelva a usar en un año que está dos años después de un bisiesto.**

Los valores iguales a 6 y 22 se interpretan como:

> **Deben pasar 6 años para que un calendario, de un año que está un año después de un bisiesto, se vuelva a usar en un año que está tres años después de un bisiesto**.
>
> **Deben pasar 22 años para que un calendario, de un año que está tres años después de un bisiesto, se vuelva a usar en un año que está un año después de un bisiesto**.

Los valores mínimos de P de cada fila, mostrados en la columna de la derecha, se interpretan como:

> **Deben pasar *28 años* para que un calendario, de un año bisiesto, se vuelva a usar.**
>
> **Deben pasar *6 años* para que un calendario, de un año que está un año después de un bisiesto, se vuelva a usar.**
>
> **Deben pasar *11 años* para que un calendario, de un año que está dos años después de un bisiesto, se vuelva a usar.**
>
> **Deben pasar *11 años* para que un calendario, de un año que está tres años después de un bisiesto, se vuelva a usar.**

Un calendario de un año bisiesto se usa una vez cada *28 años*.

Un calendario de un año no bisiesto se usa tres veces cada *28 años* con un intervalo de 6 años y dos intervalos de 11 años.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1]. Barrantes, H., Díaz, P., Murillo, M., Soto, A. (1998). Introducción a la Teoría de Números. Editorial de la Universidad estatal a Distancia (EUNED). San José, Costa Rica.

[2]. Harper, D. (2000). A Brief History of the Calendar. Kernow Plusfile Ltd. London, United Kingdom.

[3]. Koshy, Thomas. (2002). Elementary Number Theory with Applications. Harcourt Academic Press. Burlington, Massachusetts, U.S.A.

[4]. Murillo, M., Gonzalez, J. F. (2006). Teoría de los Números. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica.

[5]. Seidelmann, Kenneth. (1992). Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac. U.S. Naval Observatory, Washington D.C., U.S.A.

[6]. *http://es.wikipedia.org/wiki/Calendario_gregoriano*