LA HIPERPARÁBOLA

Wilfredo Zuleta R.[1]

"Con el estudio de la Geometría se desarrollan notablemente la intuición, la imaginación, la lógica, el pensamiento ordenado, la especulación y la creatividad" Wilfredo Zuleta R.

Este lugar geométrico, trazado con el programa libre Geogebra[2], tiene ese nombre tan sugerente y se debe a que su aspecto tiene por una lado "forma" de "parábola", y por lado al de una "hipérbola" (por sus dos ramas), lo que podríamos decir que es un híbrido de estas dos curvas, por lo tanto le hemos denominado **Hiperparábola**, y se forma de la siguiente manera:

1. Trazamos la recta $y = k$ donde $k \in \mathbb{R}^+$ y sobre ésta un punto móvil $M = (m, k)$ (Figura 1)

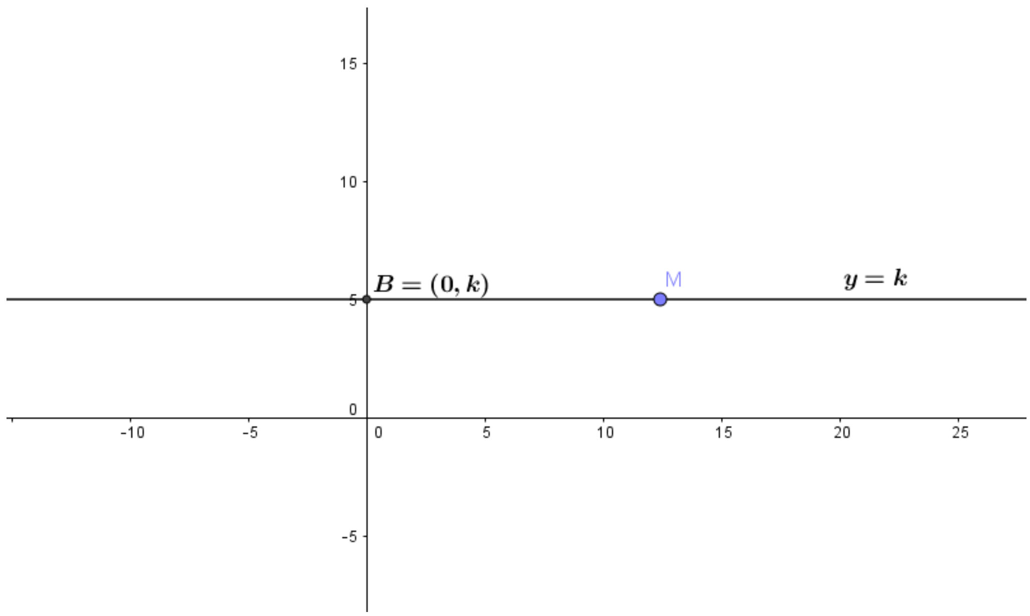


Figura 1

[1] Profesor jubilado del Núcleo universitario "Rafael Rangel" de la Universidad De Los Andes. Trujillo-Venezuela. e-mail: wrzr2001us@hotmail.com

[2] GeoGebra 5.0.311.0-3D

2. Trazamos la semirrecta con polo en el origen y que pasa por el punto M (fIgura 2)

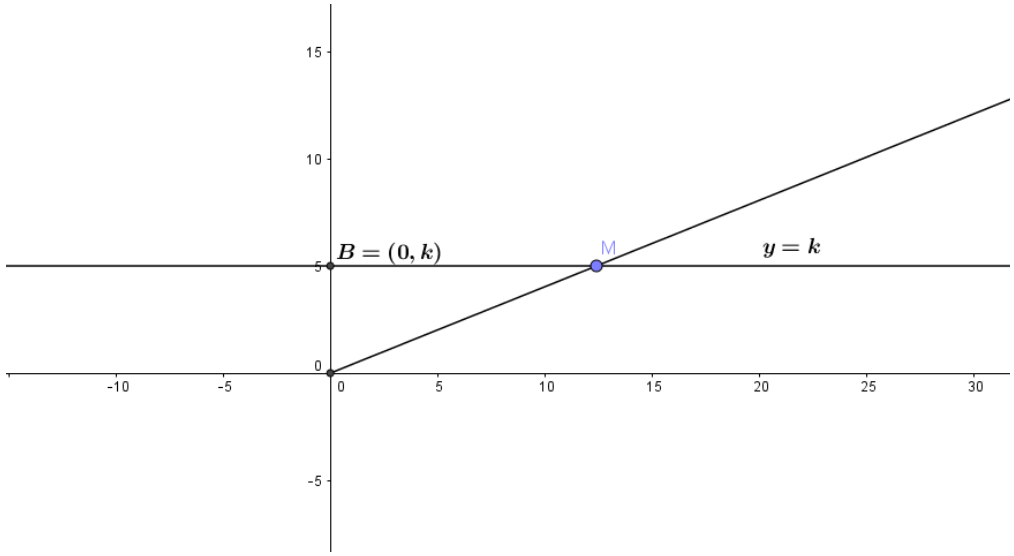


Figura 2

3. Construimos una recta perpendicular al eje x que pasa por el punto M ($x = m$) (Figura 3)

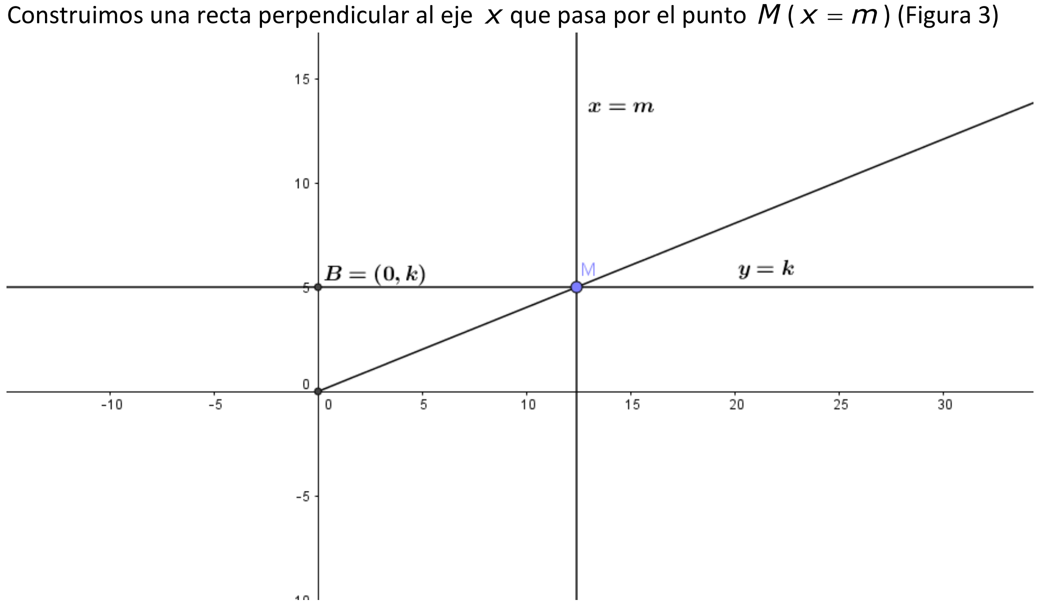


Figura 3

4. Sobre el segmento de recta escogemos un punto entre los puntos O y M, sea éste, el punto $W = tO + (1-t)M \quad con\ 0 \leq t \leq 1$ (Figura 4)

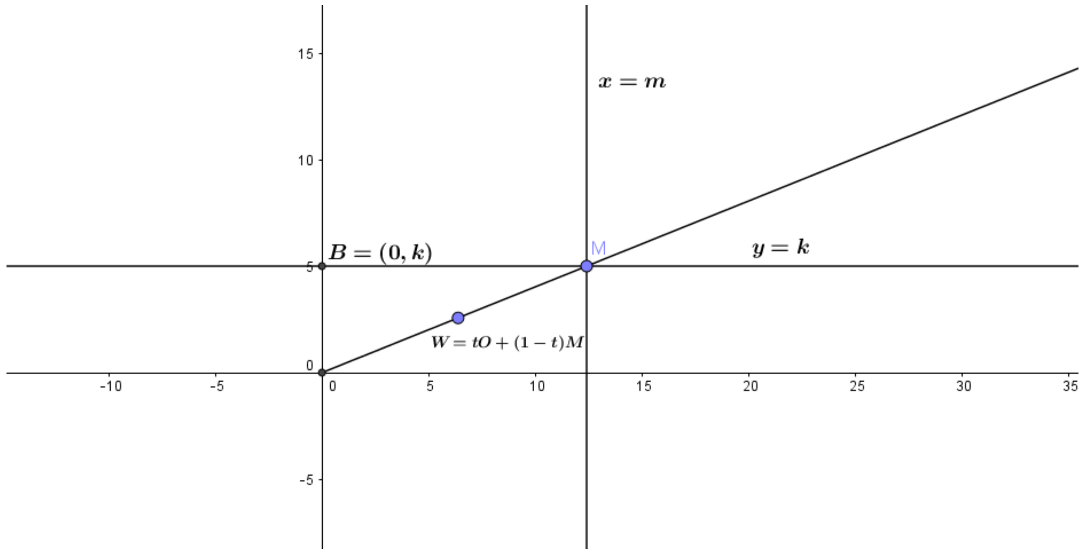


Figura 4

5. Dibujamos una circunferencia con radio igual a la longitud $\overline{MW}$ la cual corta a la recta $x = m$ en los puntos P y Q (Figura 5)

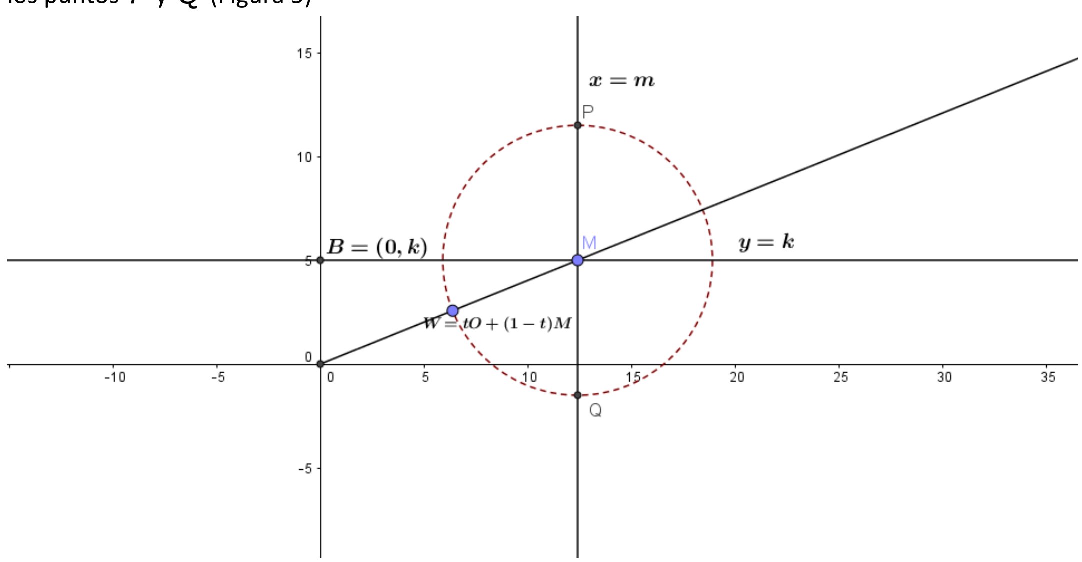


Figura 5

Cuando el punto M se desliza por la recta $y = k$, los mencionados puntos trazan el siguiente lugar geométrico, la cual hemos denominado **Hiperparábola.** (Figura 6)

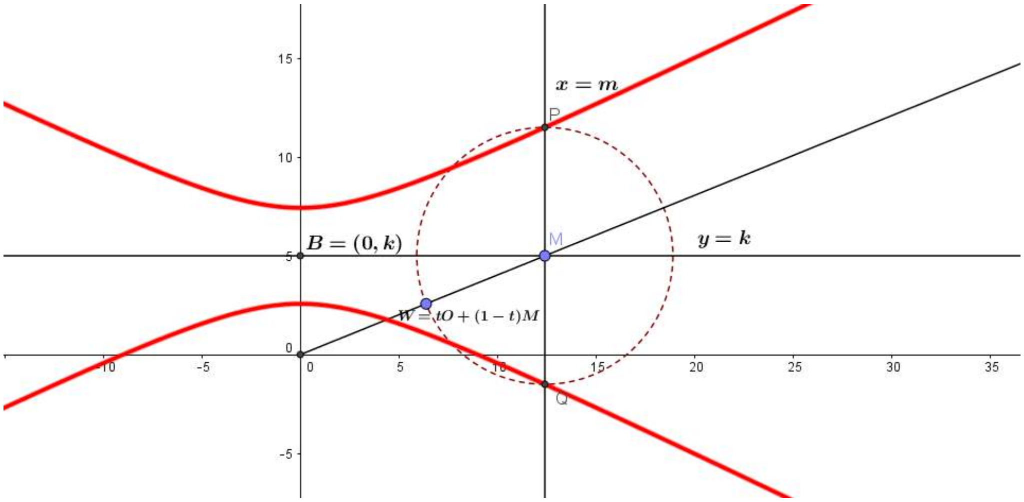


Figura 6

Esta curva es simétrica con respecto al eje y y con respecto a la recta $y = k$.
Ahora haremos la deducción de las ecuaciones paramétricas y de la ecuación cartesiana, lo cual se basa en la información que se muestra en la figura 7.

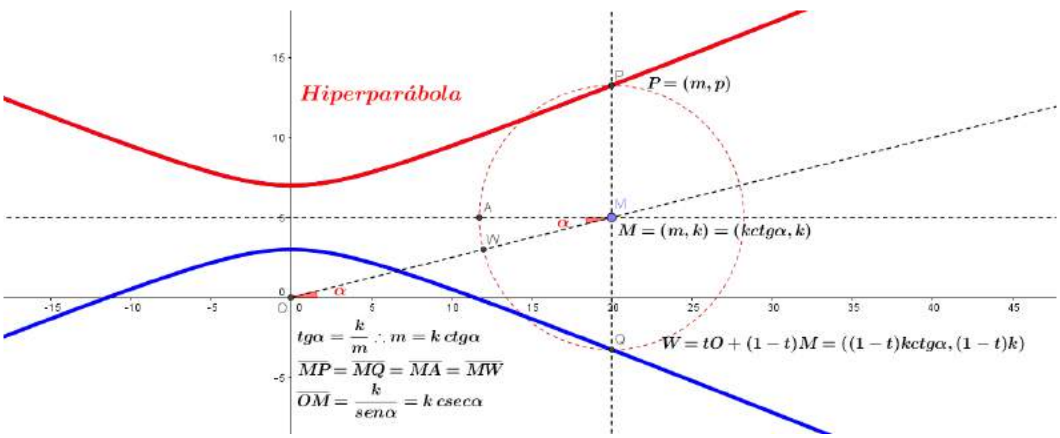


Figura 7

Obtención de las ecuaciones paramétricas de la curva

De la construcción de dicho lugar geométrico tenemos que:

$m = k\,ctg\alpha$, $\overrightarrow{OW} = <(1-t)kctg\alpha,(1-t)k>$, $\overline{MP} = \overline{MQ} = \overline{MA} = \overline{MW}$, $\overline{MP} = k\,csec\alpha$

Usando la norma de un vector y algo de trigonometría tenemos:

a) $\left\|\overrightarrow{OW}\right\| = \overrightarrow{OW}\cdot\overrightarrow{OW} = \sqrt{(1-t)^2k^2ctg^2\alpha + (1-t)^2k^2} = (1-t)k\,csec\alpha$ (ya que $csec\alpha$ >0 para $0 < \alpha < \pi$)

b) $\left\|\overrightarrow{OW}\right\| = k\,csec\alpha - (1-t)k\,csec\alpha = k\,t\,csec\alpha$, de manera que las coordenadas del punto P el cual describe (traza) la parte superior de la curva vienen dadas por $P = (k\,ctg\alpha, \mathrm{k}+k\,t\,csec\alpha) = (k\,ctg\alpha, \mathrm{k}(1+t\,csec\alpha))$, o sea las ecuaciones paramétricas de la parte superior del lugar geométrico son:

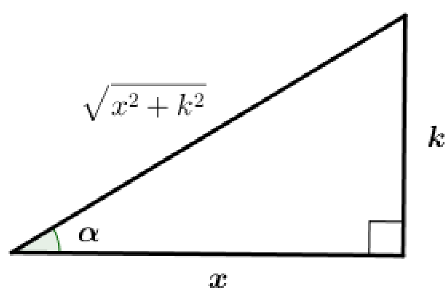
$$\begin{cases} x(\alpha) = k\, ctg\alpha \\ y(\alpha) = \mathrm{k}(1 + t\, csec\alpha) \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la simetría de la curva con respecto a la recta $y = k$ y el eje y, además la curva superior (en rojo) corta al eje y cuando $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ y las coordenadas de este punto de corte son $D = (0, \mathrm{k}(1 + \mathrm{t}))$. El corte de la curva inferior (en azul) es el punto $G = (0, \mathrm{k}(1 - \mathrm{t}))$, entonces realizando una reflexión de la rama roja de la curva con respecto al eje x y luego una traslación de esta reflexión obtenida $k(1 - t)$ unidades hacia arriba obtenemos la rama azul de tal curva y las ecuaciones paramétricas de esta rama de la curva son

$$\begin{cases} x(\alpha) = k\, ctg\alpha \\ y(\alpha) = -\mathrm{k}(1 + t\, csec\alpha) + 2k = k(1 - t\, csec\alpha) \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases}$$

Obtención de la forma cartesiana de la curva

Ahora bien, tenemos que $x = k\, ctg\alpha$, o sea, $ctg\alpha = \dfrac{x}{k}$, asociemos a esta última igualdad el siguiente triángulo rectángulo



$$tg\alpha = \frac{x}{k} \qquad csec\alpha = \frac{\sqrt{x^2 + k^2}}{k}$$

De manera que si reemplazamos este valor de la cosecante en la expresión paramétrica para y tenemos que

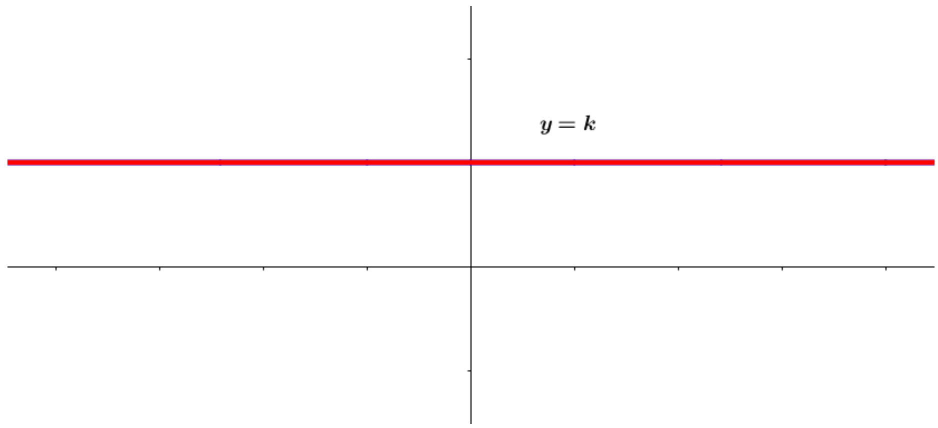
$$y = \mathrm{k}(1 + t\, csec\alpha) = \mathrm{k}(1 + \mathrm{t}\frac{\sqrt{x^2 + k^2}}{k}) \quad \therefore$$

$$(y - k)^2 - t^2(x^2 + k^2) = 0$$

Y esta última expresión es la forma cartesiana de la curva.

Algunos casos “degenerados” de ese lugar geométrico

1. Si $k \neq 0$ y $t = 0$ el lugar geométrico resultante es la recta $y = k$



2. El caso donde $k = 0$ y $t \neq 0$, lo estudiamos aparte y lo observamos la figura 8.

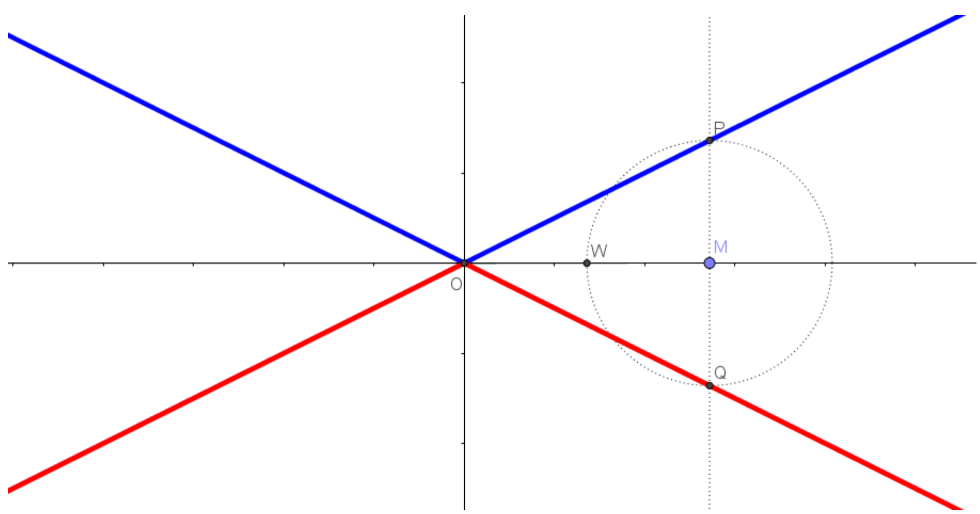


Figura 8

En este caso $M = (m, 0)$, $M = ((1-\mathrm{t})\mathrm{m}, 0)$, $\overline{WM} = \overline{PM} = \overline{QM}$.

Además $\overline{OW} = | m - (1-t)m | = | \mathrm{m} | (1-\mathrm{t})$, de manera que las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico en azul son

$$\begin{cases} x(m) = m \\ y(m) = |m|(1-t) \\ -\infty < m < \infty \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico en rojo son

$$\begin{cases} x(m) = m \\ y(m) = -|m|(1-t) \\ -\infty < m < \infty \end{cases}$$

Y las correspondientes ecuaciones cartesianas son

$$y = (1-t)|x|; \quad y = -(1-t)|x| = (t-1)|x|$$

3. Si $k = t = 0$ el lugar geométrico resultante es la recta $y = 0$ $(eje\, x)$ Ya que los puntos $M = W = P = Q$ y coinciden sobre el eje y, de manera que las ecuaciones paramétricas de dicho lugar geométrico son iguales y vienen dadas por

$$\begin{cases} x(m) = m \\ y(m) = 0 \\ -\infty < m < \infty \end{cases}$$

Y la ecuación cartesiana es: $y = 0$ (Ver figura 9)

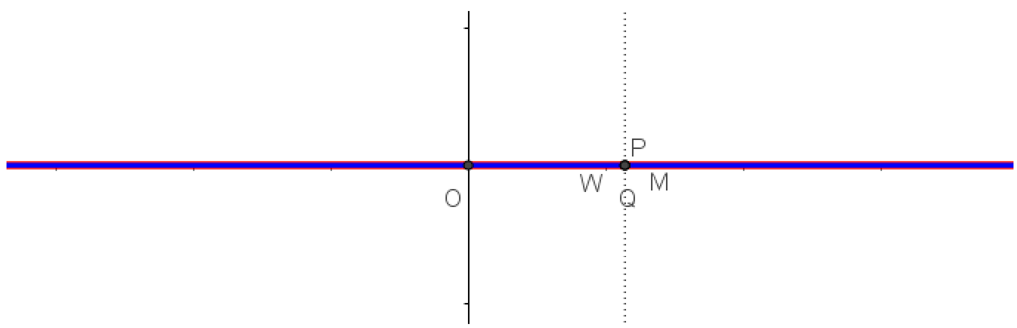


Figura 9