SOBRE LAS APLICACIONES DE R^n EN R^m

EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Carmen SÁNCHEZ DÍEZ

1. Introducción:

En su expresión más simple, el Teorema de la Función Inversa se refiere a una función $\vec{f}: A \to B$, esto es, que $\forall \vec{x} \in A, \vec{f}(\vec{x}) = \vec{y} \in B$, en la cual se pretende despejar la $\vec{x}$ y obtener otra función $\vec{g}: B \to A$ tal que $\forall \vec{y} \in B, \vec{g}(\vec{y}) = \vec{x} \in A$, verificando

$$\begin{aligned} (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}) &= \vec{g}\left[\vec{f}(\vec{x})\right] = \vec{x} \\ (\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{y}) &= \vec{f}\left[\vec{g}(\vec{y})\right] = \vec{y} \end{aligned}$$

explicando asimismo las propiedades de diferenciabilidad y continuidad de la función $\vec{g}: B \to A$ en función de las propiedades de diferenciabilidad y continuidad de la función $\vec{f}: A \to B$.

Intrínsecamente conectado con este teorema está el llamado Teorema de la Función Implícita que, también expuesto de la manera más sencilla, pretende establecer las condiciones en las que es posible obtener la función $\vec{f}: A \to B$, cuando se conocen relaciones implícitas de las variables de la forma $F(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, encontrando condiciones que permitan tanto despejar variables como establecer condiciones de diferenciabilidad y continuidad.

El problema adquiere gran importancia cuando se establece una generalización a funciones $\vec{f}: R^n \to R^m$ en el Teorema de la Función Inversa, o cuando se estudian relaciones implícitas de la forma $F_k(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)=0,\ k=1,...$ En su forma más general se trata, en definitiva, de un sistema de n ecuaciones con *n+k* variables

$$f_j(x_1,x_2,...,x_n;t_1,t_2,...,t_k)=0, \quad j=1,2,...,n$$

y se trata de saber bajo qué condiciones puede ser resuelto tal sistema respecto de las *n* variables $x_1,x_2,...,x_n$ en función de las $t_1,t_2,...,t_k$. En la demostración que hacemos del Teorema de la Función Implícita en el desarrollo de este trabajo usaremos la notación

$$f_j(\vec{x};\vec{t}_0)=0, \quad j=1,2,...,n$$

donde es $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$, $\vec{t}_0=(t_1,t_2,...,t_k)\in R^k$, por lo que $(\vec{x};\vec{t}_0)\in R^{n+k}$

2. Desarrollo:

Teorema 1:

La condición necesaria y suficiente para que la función $\vec{f}:A\to B$ admita inversa $\vec{g}:B\to A$ es que sea suprayectiva y uno a uno (inyectiva).

Demostración:

- Condición suficiente. Si es suprayectiva e inyectiva admite inversa:

$\vec{f}$ suprayectiva $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall y\in B, \exists x\in A / f(x)=y \Rightarrow \forall y\in B, \exists x\in A / g(y)=x \Rightarrow Dom(g)=B$$

$\vec{f}$ inyectiva $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x_1)=y \wedge f(x_2)=y \Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} g(y)=x_1 \\ g(y)=x_2 \end{matrix} \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow g\ uniforme$$

- Condición necesaria. Si existe inversa, entonces la función es suprayectiva e inyectiva:

$$g\circ f = I_{dA} \qquad\qquad f\circ g = I_{dB}$$

$\forall y\in B, (f\circ g)(y)=f[g(y)]=f(x)=y$,

es decir:

$\forall y \in B, \exists x \in A / f(x) = y \Rightarrow f \text{ sup} rayectiva$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow I_{dA}(x_1) = I_{dA}(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f \ inyectiva$$

Teorema 3:

Sea la función $\vec{f} : S \subset R^n \to \vec{f}(S) \subset R^m$, inyectiva en el conjunto compacto $S \subset R^n$, es decir, existe la función inversa $\vec{f}^{-1} : \vec{f}(S) \to S$. Entonces, si $\vec{f}$ es continua en S, $\vec{f}^{-1}$ es continua en $\vec{f}(S)$.

Demostración:

Sea $\vec{y} \in \vec{f}(S) / \lim \vec{y}_n = \vec{y}$, Sean también $\{\vec{x}_n\} = \{\vec{f}^{-1}(y_n)\}$, $n = 1.2,..$
Se tendrá entonces que

$$\{\vec{x}_n\} \subset S \wedge \{\vec{x}_n\} \inf inito \wedge S \ compacto \Rightarrow \exists x \in S / x \ punto\_acumulac\{\vec{x}_n\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \{\vec{x}'_n\} \subset \{\vec{x}_n\} / \lim \vec{x}'_n = \vec{x}$$

y, por ser $\vec{f}$ continua, $\{\vec{f}(\vec{x}'_n)\} \subset \{\vec{f}(\vec{x}_n)\} = \{\vec{y}_n\}$

se tiene, en definitiva:

$$\left.\begin{array}{l} \lim \vec{x}'_n = \vec{x} \wedge f \ continua \Rightarrow \lim \vec{f}(x'_n) = \vec{f}(\vec{x}) \\ \{\vec{f}(\vec{x}'_n)\} \subset \{\vec{y}_n\} \wedge \lim \vec{y}_n = \vec{y} \end{array}\right. \Rightarrow \lim \vec{f}(\vec{x}'_n) = \lim \vec{y}_n \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$$

de lo cual se sigue que $\vec{x} = \vec{f}^{-1}(\vec{y})$, o bien $\lim \vec{x}_n = \lim \vec{f}^{-1}(\vec{y}_n) = \vec{f}^{-1}(\vec{y})$

Ahora bien, $\lim \vec{f}^{-1}(\vec{y}_n) = \vec{f}^{-1}(\vec{y}) \Rightarrow \vec{f}^{-1} \ continua \ en \ \vec{f}(S)$

Teorema 4 (Teorema de la Función Inversa):

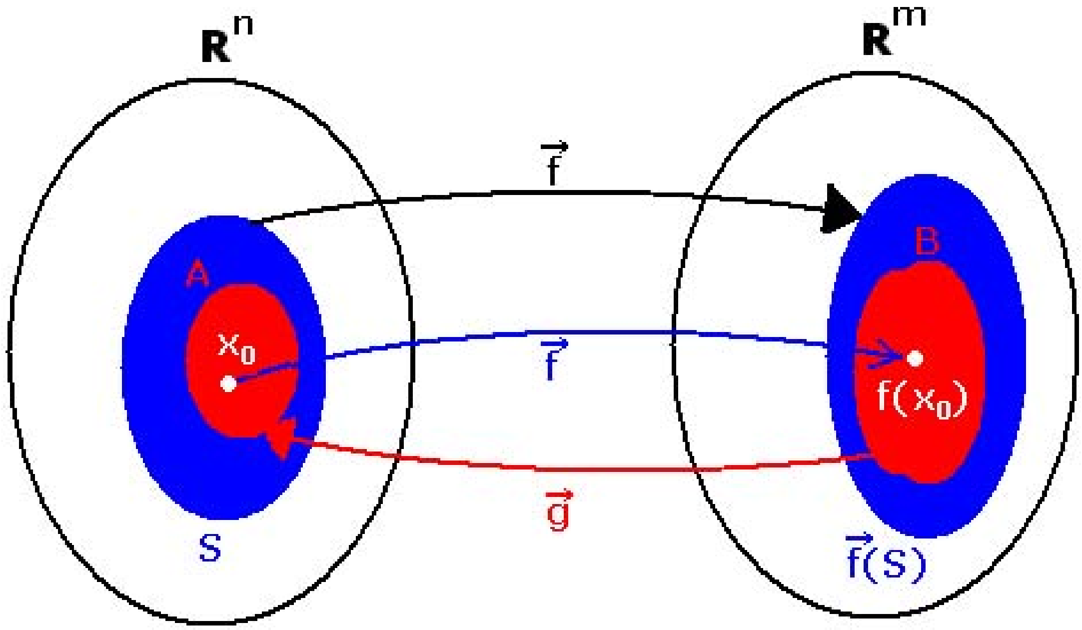
Sea $S \subset R^n$ abierto y sea $\vec{f} : S \subset R^n \to \vec{f}(S) \subset R^m$ tal que $\vec{f} \in C^1$ en S.
$\forall \vec{x}_0 \in S / J_f(\vec{x}_0) \neq 0 \Rightarrow \exists A \subseteq S \wedge \exists B \subseteq \vec{f}(S) \wedge \exists \vec{g} : B \to A$ tales que verifican:

1) $\vec{x}_0 \in A$, $\vec{f}(\vec{x}_0) \in B$.
2) $\vec{f}(A) = B$.
3) $\vec{f}$ es uno a uno en A.
4) $\vec{g}(B) = A$, $\vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in A$.
5) $\vec{g} \in C^1$ en B.

Que también puede enunciarse así:

Sea $S \subset R^n$ abierto $\wedge \vec{f}: R^n \to R^m / \vec{f} \in C^1 \ en \ S$
$\forall \vec{x}_0 \in S / J_f(\vec{x}_0) = D_j f_i(\vec{x}_0) \neq 0, i, j = 1,...,n \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists A \subseteq S \wedge \exists B \subseteq \vec{f}(S) \wedge \exists \vec{g}: B \to A / \vec{x}_0 \in A \wedge \vec{f}(\vec{x}_0) \in B \wedge \vec{f} \ inyectiva \ en \ A \wedge$
$\wedge \vec{f}(A) = B \wedge \vec{g}(B) = A \wedge \left[\forall \vec{x} \in A, \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{x}\right] \wedge \vec{g} \in C^1 \ en \ B$

Gráficamente:



$$\left.\begin{array}{c} S \subset R^n \ abierto \\ \vec{f}: R^n \to R^m \\ \vec{f} \in C^1 \ en \ S \\ J_f(\vec{x}_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \vec{x}_0 \in A, \vec{f}(\vec{x}_0) \in B \\ \vec{f} \ inyectiva \ en \ A \\ \vec{f}(A) = B \\ \vec{g}(B) = A, \vec{g}\left[\vec{f}(\vec{x})\right] = \vec{x}, \forall \vec{x} \in A \\ \vec{g} \in C^1 \ en \ B \end{array}\right.$$

Demostración:

Se tiene, desde las hipótesis del teorema:

a)
$J_f(\vec{x}_0) \neq 0 \wedge J_f(\vec{x}_0) \ continuo \Rightarrow \exists E'(x_0) \ entorno \ de \ x_0 / J_f(\vec{x}) \neq 0, \forall x \in E'(x_0) \ (*) \Rightarrow$
$(*) \Rightarrow \exists E(x_0) \subset E'(x_0) / f \ inyectiva \ en \ E(x_0)$

$(*)$: por el teorema 5 del artículo "Utilizando el Jacobiano", en esta Web.

b) Sean $K, \overline{K}$ esferas abierta y cerrada, respectivamente, con centro en el punto x_0, y contenidas en el entorno $E(x_0)$:

$$K \subset E(x_0) \Rightarrow J_f(\vec{x}) \neq 0, \forall x \in K \wedge f \text{ } inyectiva \text{ } en \text{ } K$$

c) Por (**), $f \text{ } inyectiva \text{ } en \text{ } K \Rightarrow \exists E(f(x_0)) \subset f(K)$.
Llamemos $B = E(f(x_0)) \subset f(K) \subset f(S)$
$(**)$: ver teorema 4 del artículo "Utilizando el Jacobiano", en esta Web.

d) Sea $A = f^{-1}(B) \cap K \Rightarrow A \text{ } abierto \wedge A \subseteq K \subset E(x_0) \subset S$
Por el teorema 3, se tiene que
$\vec{f} \text{ } inyectiva \text{ } y \text{ } continua \text{ } en \text{ } \overline{K} \wedge \overline{K} \text{ } compacto \Rightarrow \exists \vec{g} : \vec{f}(\overline{K}) \to \overline{K} / \vec{g}\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in \overline{K} \wedge$
$\wedge \vec{g} \text{ } continua \text{ } en \text{ } \vec{f}(\overline{K})$
Llamemos $\vec{f}^{-1} \text{ } a \text{ } la \text{ } funcion \text{ } \vec{g}$

e) Se tiene, en definitiva, que:

1. $\exists A, B \text{ } abiertos / A \subset S \wedge B \subset \vec{f}(S) \wedge \vec{x}_0 \in A, \vec{f}(\vec{x}_0) \in B$
2. $A \subset E(\vec{x}_0) \wedge \vec{f} \text{ } inyectiva \text{ } en \text{ } E(\vec{x}_0) \Rightarrow \vec{f} \text{ } inyectiva \text{ } en \text{ } A$
3. $A = \vec{f}^{-1}(B) \cap K \Rightarrow \vec{f}(A) = \vec{f}\left(\vec{f}^{-1}(B) \cap K\right) = \vec{f}\vec{f}^{-1}(B) \cap \vec{f}(K) =$
$= B \cap \vec{f}(K) = B$
por tanto es $\vec{f}(A) = B$
4. $\exists \vec{g} : \vec{f}(\overline{K}) \to K / \forall \vec{x} \in K, \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{x}$ y por ser $B \subset \vec{f}(K)$ podemos restringir esta función al conjunto B, y es: $\forall \vec{y} \in B, \dot{\exists} \vec{x} \in A / \vec{f}(\vec{x}) = \vec{y} \Rightarrow \vec{g}(B) \subseteq A$
pero también es $\forall \vec{x} \in A, \vec{g}\left[\vec{f}(\vec{x})\right] = \vec{x} \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) \in B \Rightarrow \dot{\exists} \vec{y} \in B / \vec{g}(\vec{y}) = \vec{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{g}(B) \supseteq A$
por lo cual, de ambas inclusiones: $\vec{g}(B) = A$

f) Para probar la afirmación 5 del teorema, o sea, que $\vec{g} \in C^1 \text{ } en \text{ } B$ ($\vec{g}$ diferenciable con continuidad en B), haremos un desarrollo aparte.

Se trata de probar que $\vec{g} = (g_1, ..., g_n) : R^n \to R^n$ es diferenciable con continuidad en $B \subset \vec{f}(S) \subset R^n$, cumpliéndose, como ya hemos visto en los apartados anteriores, que A y B son abiertos tales que $\vec{x}_0 \in A$, $\vec{f}(\vec{x}_0) \in B$, $\vec{f}(A) = B$, $\vec{f}$ es uno a uno en $A.$, $\vec{g}(B) = A, \text{ } \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in A.$

Por definición de función diferenciable con continuidad (ver "Utilizando el Jacobiano" en esta misma web) se trata, en definitiva, de probar que existen y son continuas las derivadas parciales

$$D_r g_k(\vec{y}),\ \forall \vec{y} \in B,\ \ r,k = 1,\ldots,n$$

O dicho de otro modo, que existen y son continuos los límites

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{g_k(\vec{y} + \lambda.\vec{u}_r) - g_k(\vec{y})}{\lambda},\quad \begin{matrix} k = 1,\ldots,n \\ r = 1,\ldots,n \end{matrix}$$

(siendo el unitario $\vec{u}_r = (0,.\overset{--r--}{\ldots}.,0,1,0\ldots0)$, esto es, el 1 está en la posición r-ésíma)

Veamos:

f1) Llamemos, $\forall \vec{y} \in B$ y para $\lambda \to 0$:

$$\vec{x} = \vec{g}(\vec{y}) \in A, \qquad\qquad x' = \vec{g}(\vec{y} + \lambda.\vec{u}_r) \in A$$

de donde

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \qquad\qquad \vec{y} + \lambda.\vec{u}_r = \vec{f}(\vec{x}')$$

f2) En definitiva, se tiene que

$$\vec{f}(\vec{x}') - \vec{f}(\vec{x}) = \lambda.\vec{u}_r = \lambda.(0,.\overset{--r--}{\ldots}.,0,1,0\ldots0)$$

o bien, usando las componentes $f_1,\ldots f_n$:

$$f_i(\vec{x}') - f_i(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & i \neq r \\ \lambda, & i = r \end{cases} \Rightarrow \frac{f_i(\vec{x}') - f_i(\vec{x})}{\lambda} = \begin{cases} 0, & i \neq r \\ 1, & i = r \end{cases}$$

f3) Por el teorema del valor medio n-dimensional:

$$f_1(\vec{x}') - f_i(\vec{x}) = \vec{\nabla} f_i(\vec{z}_i).(\vec{x}' - \vec{x})$$

siendo $\vec{z}_i$ punto del segmento que une $\vec{x}$ con $\vec{x}'$

f4) Si dividimos por λ se tiene:

$$\frac{f_1(\vec{x}') - f_i(\vec{x})}{\lambda} = \vec{\nabla} f_i(\vec{z}_i).\frac{\vec{x}' - \vec{x}}{\lambda}$$

y en forma matricial sería

$$\begin{bmatrix} D_1 f_1(\vec{z}_1) & \dots & D_n f_1(\vec{z}_1) \\ D_1 f_2(\vec{z}_2) & \dots & D_n f_2(\vec{z}_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_n(\vec{z}_n) & \dots & D_n f_n(\vec{z}_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^{'} - x_1}{\lambda} \\ \dfrac{x_2^{'} - x_2}{\lambda} \\ \dots \\ \dots \\ \dfrac{x_n^{'} - x_n}{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tiene solución única al ser no nulo el determinante de la matriz de los coeficientes, pues de ser el jacobiano en un punto de S no nulo, razonando como antes, obtenemos que

$$\det\left\lfloor D_j f_i(\vec{z}_i) \right\rfloor \neq 0$$

para los puntos del conjunto A. Por tanto, la k-ésima incógnita es

$$\frac{x_k^{'} - x_k}{\lambda} = \frac{g_k(\vec{y} + \lambda . \vec{u}_r) - g_k(\vec{y})}{\lambda}, \quad \begin{cases} k = 1, \dots, n \\ r = 1, \dots, n \end{cases}$$

f5) Por consiguiente, existen los límites

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{g_k(\vec{y} + \lambda . \vec{u}_r) - g_k(\vec{y})}{\lambda} = D_r g_k(\vec{y}), \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, n \\ r = 1, \dots, n \end{matrix}$$

f6) Estos límites son cocientes de determinantes donde figuran solo las derivadas parciales de la función $\vec{f}$, $D_j f_i(\vec{x})$, que son funciones continuas por ser $\vec{f} \in C^1$. Así, pues, de la continuidad de las $D_j f_i(\vec{x})$ resulta la continuidad del las $D_r g_k(\vec{y})$.

5. Queda, pues, probado que al ser las $D_r g_k(\vec{y})$ continuas, la función $\vec{g}$ es diferenciable con continuidad, o sea, $\vec{g} \in C^1$ en B.

Teorema 5 (Teorema de la Función Implícita):

Sea $\vec{f} = \left(f_1,...,f_n\right)$ definida en un conjunto abierto $S \subset R^{n+k}$ con valores en R^n, que es diferenciable con continuidad, es decir, $\vec{f} \in C^1$ en S. Sea $(\vec{x}_0;\vec{t}_0)$ un punto de S para el cual es $\vec{f}(\vec{x}_0;\vec{t}_0) = 0$ y no se anula el jacobiano, $J_f(\vec{x}_0;\vec{t}_0) = D_j f_i(\vec{x}_0;\vec{t}_0) \neq 0, i, j = 1,...,n$, con $\vec{x}_0 \in R^n$ y $\vec{t}_0 \in R^k$. Se verifica entonces que existe un entorno E del punto $\vec{t}_0 \in R^k$ y una única función $\vec{g} : E \to R^n$ tal que

1) $\vec{g}(\vec{t}_0) = \vec{x}_0$
2) $\forall \vec{t} \in E, \vec{f}\left(\vec{g}(\vec{t});\vec{t}\right) = 0$
3) $\vec{g} \in C^1 \ en\ E$

Más simbólicamente, puede enunciarse así:

Sea $S \subset R^{n+k}$ abierto $\wedge \vec{f} : R^{n+k} \to R^n / \vec{f} \in C^1 \ en\ S$

$\forall \vec{x}_0 \in R^n, \forall \vec{t}_0 \in \vec{R}^k / (\vec{x}_0;\vec{t}_0) \in S, \vec{f}(\vec{x}_0;\vec{t}_0) = 0, J_f(\vec{x}_0;\vec{t}_0) = D_j f_i(\vec{x}_0;\vec{t}_0) \neq 0, i, j = 1,...,n \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists E(\vec{t}_0) \subset R^k, entorno\ de\ \vec{t}_0 \wedge \exists \vec{g} : E(\vec{t}_0) \to R^n / \vec{g}(\vec{t}_0) = \vec{x}_0 \wedge \vec{g} \in C^1 \ en\ E(\vec{t}_0) \wedge$

$\wedge \left[\forall \vec{t} \in E(\vec{t}_0), \vec{f}(\vec{g}(\vec{t});\vec{t}) = 0\right]$

Demostración:

Antes de establecer el entorno $E(\vec{t}_0)$ y la función $\vec{g}$ que se indican en la tesis del teorema, veamos la aplicación del Teorema de la Función Inversa a la función $\vec{F}$ definida de R^{n+k} en R^{n+k}, de la siguiente manera:

$$\vec{F} : R^{n+k} \to R^{n+k},$$

$$\forall (\vec{x},\vec{t}) \in R^{n+k} / \vec{x} = (x_1,...,x_n) \in R^n, \vec{t} = (t_1...,t_k) \in R^k,$$
$$\vec{F}(\vec{x},\vec{t}) = (F_1(\vec{x},\vec{t}),...,F_n(\vec{x},\vec{t}), F_{n+1}(\vec{x},\vec{t}),....,F_{n+k}(\vec{x},\vec{t})) \in R^{n+k}$$

donde cada una de las componentes viene dada por:

$$F_m(\vec{x},\vec{t}) = \begin{cases} f_m(\vec{x},\vec{t}) & si\ 1 \leq m \leq n \\ t_{m-n} & si\ n < m \leq n+k \end{cases}$$

O sea, la función $\vec{F}$ puede expresarse así:

$$\vec{F} = \left(\vec{f},\vec{i}\right): R^{n+k} \to R^{n+k}$$

donde es $\vec{f} = (f_1,...,f_n) : R^{n+k} \to R^n$ la función de la hipótesis,
y es $\vec{i} = (i_1,...,i_k) : R^{n+k} \to R^k$ la identidad en R^k.

Entonces, el jacobiano de esta función en un punto genérico $(\vec{x},\vec{t})$ será:

$$J_F(\vec{x},\vec{t}) = \det\lfloor D_j F_i(\vec{x},\vec{t})\rfloor$$

por la forma de la definición de la función $\vec{F}$ resulta inmediato que este determinante tiene las k últimas filas y las k últimas columnas formando una caja cuadrada cuya diagonal es la unidad y el resto de los elementos son nulos; mientras que las n primeras filas y n primeras columnas coinciden con las del determinante jacobiano de la función $\vec{f}$. Por consiguiente:

$$J_F(\vec{x},\vec{t}) = \det\lfloor D_j f_i(\vec{x},\vec{t})\rfloor$$

Luego, al cumplirse, por hipótesis, que $J_f(\vec{x}_0,\vec{t}_0) = \det\lfloor D_j f_i(\vec{x}_0,\vec{t}_0)\rfloor \neq 0$ se concluye que también es $J_F(\vec{x}_0,\vec{t}_0) \neq 0$.

Por otra parte, es: $\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{t}_0) = \left(\vec{f}(\vec{x}_0,\vec{t}_0),\vec{i}(\vec{x}_0,\vec{t}_0)\right) = (\vec{0},\vec{t}_0)$

Por el Teorema de la Función Inversa, existirán entonces dos conjuntos contenidos en R^{n+k}, A y B, y existirá también una función inversa, $\vec{G}: R^{n+k} \to R^{n+k}$, verificándose:

$$\vec{F}\ inyectiva\ en\ A,\ \vec{F}(A) = B,\ \vec{G}(B) = A,\ \vec{G}\left[\vec{F}(\vec{x},\vec{t})\right] = (\vec{x},\vec{t}),\ \vec{G} \in C^1\ \ en\ \ B$$

En estas condiciones, podemos expresar a la función inversa $\vec{G}$ en la forma:

$$\vec{G} = (\vec{G}_n,\vec{G}_k)$$

De modo que:

$$\begin{aligned}&\forall(\vec{x},\vec{t}) \in B, \vec{G}(\vec{x},\vec{t}) = \left(\vec{G}_n,\vec{G}_k\right)(\vec{x},\vec{t}) = \left(\vec{G}_n(\vec{x},\vec{t}),\vec{G}_k(\vec{x},\vec{t})\right) = \\ &= \left(G_{n1}(\vec{x},\vec{t}),\dots,G_{nn}(\vec{x},\vec{t}),\ G_{k1}(\vec{x},\vec{t}),\dots,G_{kk}(\vec{x},\vec{t})\right) \in R^{n+k}\end{aligned}$$

O sea, es:

$$\vec{G}_n : R^{n+k} \to R^n,\quad \forall(\vec{x},\vec{t}) \in B \subset R^{n+k}, \vec{G}_n(\vec{x},\vec{t}) \in R^n$$

$$\vec{G}_k : R^{n+k} \to R^k,\quad \forall(\vec{x},\vec{t}) \in B \subset R^{n+k}, \vec{G}_k(\vec{x},\vec{t}) \in R^k$$

por lo cual se tiene que

$$\begin{aligned}&\vec{G}\left(\vec{F}(\vec{x},\vec{t})\right) = \left(\vec{G}_n,\vec{G}_k\right)\left(\vec{F}(\vec{x},\vec{t})\right) = \left(\vec{G}_n\left(\vec{F}(\vec{x},\vec{t})\right),\vec{G}_k\left(\vec{F}(\vec{x},\vec{t})\right)\right) = (\vec{x},\vec{t}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases}\vec{G}_n\left(\vec{F}(\vec{x},\vec{t})\right) = \vec{x} \\ \vec{G}_k\left(\vec{F}(\vec{x},\vec{t})\right) = \vec{t}\end{cases}\end{aligned}$$

A partir de esto, describimos el entorno $E(\vec{t}_0)$ y la función $\vec{g}$ que figuran en la tesis del teorema de la manera siguiente:

$$E(\vec{t}_0) = \{\vec{t} \in R^k / (\vec{0}, \vec{t}) \in B\}$$
$$\forall \vec{t} \in E(\vec{t}_0),\ \vec{g}(\vec{t}) = \vec{G}_n(\vec{0}, \vec{t})$$

con lo cual es $E(\vec{t}_0)$ abierto y también $E(\vec{t}_0) \subseteq B$

$\vec{g} \in C^1\ en\ B$, por ser las componentes de $\vec{g}$ también componentes de $\vec{G}$.

Asimismo es:

$$\left(\vec{0}, \vec{t}_0\right) = \vec{F}(\vec{x}_0, \vec{t}_0) \Rightarrow \vec{g}(\vec{t}_0) = \vec{G}_n(\vec{0}, \vec{t}_0) = \vec{G}_n(\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{t}_0)) = \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{g}(\vec{t}_0) = \vec{x}_0$$

3. Documentación:

Apóstol, T. M.; Análisis Matemático, Editorial Reverté. Barcelona, 1998.
Apóstol, T.M.; Calculus, Editorial Reverté. Barcelona, 1991.
Dieudonné, J.; Fundamentos de Análisis Moderno, Editorial Reverté. Barcelona, 1991.
Fleming, W.; Functions of several variables, Springer-Verlag, Berlin, 1994
Rudin, W.; Principios de Análisis Matemático, Editorial Mc Grall Hill, 1990.
Spivak, M.; Calculo en variedades, Editorial Reverté. Barcelona, 1994
Spivak, M.; Calculus, Editorial Reverté. Barcelona, 1988.

Carmen SÁNCHEZ DÍEZ
titakrmen@hotmail.com