

# MATEMÁTICAS DE TEORÍA M

Alberto Mejías<sup>1</sup>

*Las cosas más importantes en matemáticas, son las que tienen un fundamento más débil...*

-- **ABEL**, en carta a su maestro Holmboë, en 1826.

## Resumen:

A pesar de carecer actualmente de formulación dinámica, es posible obtener gran cantidad de información sobre Teoría M, teoría que se postula como unificadora de todas las interacciones, a partir de sus sectores perturbacionales y de baja energía. En las regiones perturbacionales adecuadas, la Teoría M adopta la apariencia de la Teoría de Cuerdas. Al considerar su límite de baja energía, surge la supergravedad en once dimensiones. Aquí se indica cómo Teoría M puede ser considerada como una deformación biparamétrica de Geometría Clásica, donde un parámetro controla la generalización de puntos a lazos y el otro parámetro controla la suma sobre topologías de superficies RIEMANN. La formulación matemática final de Teoría M tendrá que considerar Teoría de Fibrados Vectoriales, Teoría K y Geometría No Conmutativa.

**Descriptor:** Teoría cordal, Geometría Riemann, Fibrados Vectoriales, Teoría K, Geometría no Conmutativa, Teoría cuántica, Teoría Conformal de campos.

## Abstract.

Despite currently lacking dynamic formulation, it is possible to get lots of information about M theory, theory that is postulated like unifying all interactions, from their perturbative and low energy sectors. In suitable perturbative regions, the M theory takes the appearance of the string theory. When considering its limit of low energy, arises the supergravity in eleven dimensions. Here It is indicated how M-theory can be considered as a two-parameter deformation of Classical Geometry, where one parameter controls the generalization from points to loops, and the other parameter controls the sum over topologies of RIEMANN surfaces. The final mathematical formulation of M-theory will have to make contact with the theory of vector bundles, K-theory and noncommutative geometry.

**Keywords:** String Theory, Riemann Geometry, Vector Bundles, K-Theory, Non-Commutative Geometry, Quantum Theory, Conformal Fields Theory.

---

<sup>1</sup> Albero R. Mejías E. es Licenciado en Matemática, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida- Venezuela. Es profesor jubilado de la Universidad de los Andes. [alrame59@gmail.com](mailto:alrame59@gmail.com)

## Alberto Mejías

### 1 Introducción

Durante años ha habido muchas interacciones fructíferas entre Teoría Cordal [15] y varios campos de Matemática. Materias como Geometría Algebraica y Teoría de Representación han sido estimuladas por nuevos conceptos como *Simetría Especular* [3], *Cohomología Cuántica* [13] y *Teoría Conformal de Campos* [4]. Pero, la mayoría de estos desarrollos se han basado en la formulación perturbacional de Teoría Cordal o en el formalismo LAGRANGEano con respecto a aplicaciones de superficies RIEMANN, a variedades y cuantización de espacios de lazos. Este enfoque perturbacional es, sin embargo, sólo una descripción aproximada aplicable para valores pequeños del parámetro de cuantización.

Ha habido mucho progreso en la comprensión de una descripción más fundamental de la teoría, con lo que se ha conocido como Teoría M. Teoría M podría ser, hasta ahora, el objeto matemático más complejo y más rico en las físicas. Parece unificar tres grandes ideas de las físicas teóricas del siglo veinte:

1. Relatividad General - la idea que la gravedad puede ser descrita por la geometría RIEMANN de espaciotiempo.
2. Teoría de Calibración - la descripción de fuerzas entre partículas elementales usando conexiones sobre fibrados vectoriales. En matemáticas esto involucra Teoría K y teoremas de índices.
3. Las cuerdas o, más generalmente, los objetos extensos, como generalización natural de partículas puntuales. Matemáticamente esto significa que se estudian los espacios primariamente, a través de sus (cuantizados) espacios de lazos.

En la actualidad parece que estas tres ideas independientes están estrechamente relacionadas y, quizás, son esencialmente equivalentes. En alguna extensión, las físicas están intentando construir un diccionario entre Geometría, Teoría de Calibración y Cuerdas.

## Alberto Mejías

Debe decirse que en todos los desarrollos ha habido dos ingredientes adicionales, que son completamente cruciales. El primero es Mecánica Cuántica —la descripción de realidad física en términos de Álgebras de Operadores que actúan sobre espacios HILBERT. En la mayoría de los esfuerzos por entender Teoría Cordal, Mecánica Cuántica ha sido fundamental y hay poca indicación de que esto vaya a cambiar.

El segundo ingrediente es Supersimetría —unificación de materia y fuerzas. Matemáticamente, Supersimetría se relaciona estrechamente a complejos DE RHAM y Topología Algebraica. De alguna manera, muchas de las milagrosas interconexiones en Teoría Cordal, sólo funcionan si Supersimetría está presente. Puesto que esencialmente, se trabaja con complejos, no debe sorprender a los matemáticos que haya varios índices 'topológicos' estables con respecto a perturbaciones, que pueden computarse exactamente, dentro de límites apropiados. Desde una perspectiva física, Supersimetría es quizás, la más robusta predicción de Teoría Cordal.

### 1.1 Una deformación biparamétrica de Geometría Clásica

Con propósitos didácticos, en esta exposición se considerará a Teoría M como una familia biparamétrica de deformaciones de Geometría RIEMANN "clásica". Estos dos parámetros se introducirán heurísticamente. (Después se dará una definición más precisa).

Primero, en Teoría Cordal Perturbacional se estudian los lazos en una variedad espaciotiempo. Se puede considerar que estos lazos tienen una longitud intrínseca  $\ell_s$ , la *longitud cordal*. Por lo menos, a un nivel heurístico está claro que en el límite  $\ell_s \rightarrow 0$ , la cuerda degenera a un punto, un lazo constante. El parámetro  $s$

## Matemáticas de Teoría M

controla la "cordalidad" del modelo. Se verá cómo la cantidad  $\ell_{\mathbf{s}}^2 = \alpha'$  juega el papel de constante PLANCK en la superficie mundi de la cuerda (superficie que barre la cuerda en su movimiento). Es decir, controla la corrección cuántica de la teoría de campos, bidimensional, sobre la superficie mundi de la cuerda. Un ejemplo importante de una deformación cordal es la cohomología cuántica [13].

Segundo, las cuerdas pueden henderse y unirse, barriendo una superficie  $\Sigma$  de topología general, en espaciotiempo. Según las reglas generales de Mecánica Cuántica hay que incluir una suma sobre todas las topologías. Tal suma sobre las topologías puede regularse si se puede introducir un parámetro formal  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , el *acoplamiento cordal*, tal que una superficie de género  $g$ , se pondera por un factor  $\lambda^{2g-2}$ . Las topologías de género superior pueden interpretarse como procesos virtuales en los que las cuerdas se escinden y se juntan —un típico fenómeno cuántico. Por tanto, el parámetro  $\lambda$  controla las correcciones cuánticas. De hecho se puede igualar  $\lambda^2$  con la constante PLANCK en espaciotiempo. Sólo para valores pequeños de  $\lambda$  se puede describir teoría de cuerdas en términos de espacios de lazos y sumas sobre superficies.

De hecho, en el caso de partículas se sabe que para valores grandes de  $\lambda$  es mejor pensar en términos de ondas o, más precisamente, campos cuánticos. Así que, se espera que, para valores grandes de  $\lambda$  y  $\alpha'$  el marco correcto es Teoría Cordal de Campos [22]. Esto es en parte verdad, pero es en general difícil de analizar esta Teoría Cordal directamente. En particular, la ocurrencia de branas, objetos extendidos de dimensión superior, que jugarán un papel importante en lo subsecuente, es a menudo oscura. (Ver, sin embargo, [18]).

## Alberto Mejías

Resumiendo, se pueden distinguir dos tipos de deformaciones: efectos cordales parametrizados por  $\alpha'$  y efectos cuánticos parametrizados por  $\lambda$ . Esta situación puede describirse con la siguiente tabla

$\alpha' > 0$	Teoría Conformal de Campos <i>cuerdas</i>	M-teoría <i>campos cordales, branas</i>
$\alpha' = 0$	Mecánica Cuántica <i>partículas</i>	Teoría Cuántica de Campos <i>campos</i>
	$\lambda = 0$	$\lambda > 0$

Vale la pena mostrar algunos campos matemáticos relacionados, en una tabla similar

$a' > 0$	Cohomología Cuántica <i>(Gromov, Witten)</i>	Geometría No Conmutativa <i>(Connes)</i>
$a' = 0$	Invariantes combinatorias nodulares <i>(Vassiliev, Kontsevich)</i>	4-variedades, 3-variedades, nudos <i>(Donaldson, Witten, Jones)</i>
	$\lambda = 0$	$\lambda > 0$

Ahora se repasarán brevemente, estas varias generalizaciones. Se puede hallar más material al respecto en [5].

## Matemáticas de Teoría M

### 2 Mecánica Cuántica y Partículas

En Mecánica Clásica se describen las partículas puntuales sobre una variedad RIEMANN  $\mathbb{W}$ , que se considera como un espaciotiempo (EUCLIDEANO). Hablando pedantemente, se mira a  $\mathbb{W}$  a través de aplicaciones

$$w: pt \rightarrow \mathbb{W},$$

de un punto abstracto a  $\mathbb{W}$ . La Mecánica Cuántica asocia al clásico espacio de configuración  $\mathbb{W}$ , el espacio HILBERT  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{W})$  de las funciones de onda cuadráticamente integrables. Se quiere pensar a este espacio HILBERT como asociado a un punto

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pt}.$$

Para una partícula puntual supersimétrica, se trabajará, más bien, con el espacio de formas diferenciales DE RHAM,  $\mathcal{H} = \Omega^*(\mathbb{W})$ .

Clásicamente, una partícula puede ir en un tiempo  $t$ , de un punto  $w$  a un punto  $v$  a lo largo de alguna línea preferida, típicamente una geodésica. Mecánico-cuánticamente se tiene, en cambio, un operador de evolución lineal

$$\Phi_t: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H},$$

que describe la evolución con respecto al tiempo. A través de la integral FEYNMAN, de línea, este operador se asocia a aplicaciones del intervalo de longitud  $t$ , a  $\mathbb{W}$ . Más precisamente, el núcleo  $\Phi_t(w, v)$  del operador  $\Phi_t$ , viene dado por la integral de línea

$$\Phi_t(w, v) = \int_{w(\tau)} [dw] e^{-\int_0^t d\tau |\dot{w}|^2},$$

## Alberto Mejías

sobre todas las líneas  $w(t)$  con el  $w(0) = w$  y  $w(t) = v$ .  $\Phi_t$  es el núcleo de la ecuación de calor

$$\frac{d}{dw} \Phi_t = \Delta \Phi_t, \quad \Phi_0 = \delta(w - v).$$

Estas integrales de líneas tienen una propiedad de empalme natural: si se tiene una evolución primero sobre un tiempo  $t_1$ , seguida de una evolución sobre un tiempo  $t_2$ , esto debe ser equivalente a una evolución sobre un tiempo  $t_1 + t_2$

$$\Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2} = \Phi_{t_1 + t_2}. \quad (1)$$

Esto permite escribir

$$\Phi_t = e^{-tH}$$

donde  $H$  es el HAMILTONiano. En el caso de una partícula en  $\mathbb{W}$ , el HAMILTONiano viene dado, desde luego, simplemente por el LAPLACEano  $H = -\Delta$ .

La propiedad de composición (1) es una propiedad general de las Teorías Cuánticas de Campos. Conduce al enfoque functorial de SEGAL, de Teoría Cuántica de Campos, como un functor entre la categoría de variedades (con bordismos) y la de espacios vectoriales (con aplicaciones lineales) [16].

El HAMILTONiano puede escribirse como

$$H = -\Delta = -(dd^* + d^*d).$$

Aquí las diferenciales  $d$ ,  $d^*$  juegan el papel del sobrecargas. Los estados fundamentales satisfacen  $H\psi = 0$  y, por tanto, son formas armónicas y en correspondencia 1-a-1 con el grupo de cohomología DE RHAM

$$\psi \in \text{Harm}^*(\mathbb{W}) \cong H^*(\mathbb{W}).$$

## Matemáticas de Teoría M

Es preciso hacer dos comentarios adicionales. Primero, se puede considerar, también, a una 1-variedad cerrada, a saber, un aro (copia de una circunferencia)  $S^1$  de longitud  $t$ . Ya que un aro se obtiene identificando los dos extremos de un intervalo, se puede escribir

$$\Phi_{S^1} = \text{Tr}_{\mathcal{H}} \Phi_t.$$

Aquí la función partición  $\Phi_{S^1}$  es un número asociado al aro  $S^1$  que codifica al espectro de  $\Delta$ . También se puede calcular la función partición supersimétrica usando el número FERMIÓNICO  $F$  (definido como el grado de la correspondiente forma diferencial). Determina el número EULER

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}} (-1)^F \Phi_t (-1)^F = \chi(\mathbb{W}).$$

Segundo, para hacer el paso desde Mecánica Cuántica a la propagación de una partícula en la Teoría Cuántica de Campos, hay que integrar con respecto a la métrica en la 1-variedad. En caso de un intervalo se obtiene el propagador usual, la función GREEN del LAPLACEano,

$$\int_0^\infty dt e^{t\Delta} = \frac{1}{\Delta}.$$

### 3 Teoría Conformal de Campos y Cuerdas

Ahora se introducirá el primer parámetro de  $\alpha'$  y se generalizará desde las partículas puntuales y la Mecánica Cuántica a las cuerdas y la Teoría Conformal de Campos.



## Alberto Mejías

### 3.1 Modelos sigma

Una cuerda se puede considerar como un lazo parametrizado. Así que, en este caso, se estudiará la variedad  $\mathbb{W}$  a través de aplicaciones

$$w: S^1 \rightarrow \mathbb{W}$$

es decir, a través del espacio de lazos libres  $\mathcal{L}\mathbb{W}$ .

La cuantización asociará un espacio HILBERT a este espacio de lazos. Aproximadamente, se podría pensar en este espacio HILBERT como  $L^2(\mathcal{L}\mathbb{W})$ , pero es bueno pensar en él como un cuantización de un espesor infinitesimal del lugar de los lazos constantes,  $\mathbb{W} \subset \mathcal{L}\mathbb{W}$ . Estos lazos constantes son los puntos fijos bajo la obvia acción de  $S^1$  sobre el espacio de lazos. El fibrado normal a  $\mathbb{W}$  en  $\mathcal{L}\mathbb{W}$ , descompone en espacios propios bajo esta acción de  $S^1$  y esto da una descripción (válida para un gran volumen de  $\mathbb{W}$ ) del espacio HILBERT  $\mathcal{H}_{S^1}$  asociado al aro, como las secciones normalizables de un fibrado de un espacio FOCK infinito sobre  $\mathbb{W}$ .

$$\mathcal{H}_{S^1} = L^2(\mathbb{W}, \mathcal{F}_+ \otimes \mathcal{F}_-)$$

donde el fibrado FOCK está definido como

$$\mathcal{F} = \bigotimes_{n \geq 1} S_{q^n}(T\mathbb{W}) = \mathbb{C} \oplus qT\mathbb{W} \oplus \dots$$

Aquí se usa la variable formal  $q$  para indicar la  $\mathbb{Z}$ -graduación de  $\mathcal{F}$  y la notación estándar

$$S_q V = \bigotimes_{N \geq 0} q^N S^N V,$$

para la función generadora de productos simétricos de un espacio vectorial  $V$ .

Cuando una cuerda se mueve en el tiempo, barre una superficie  $\Sigma$ . Para una cuerda libre,  $\Sigma$  tiene la topología de  $S^1 \times I$ , pero también se puede considerar, sin costo extra, cuerdas interactivas que se unen y se hienden. En ese caso  $\Sigma$  será una

## Matemáticas de Teoría M

superficie orientada, de topología arbitraria. Así, en el formalismo LAGRANGEANO uno se permite considerar aplicaciones

$$w: \Sigma \rightarrow \mathbb{W}$$

Hay una acción natural para un tal modelo sigma si se escoge una estrella HODGE o una estructura conformal sobre  $\Sigma$  (conjuntamente, desde luego, con una métrica RIEMANN  $g$  sobre  $\mathbb{W}$ )

$$S(w) = \int_{\Sigma} g_{\mu\nu} dw^{\mu} \wedge *dw^{\nu}.$$

Los puntos críticos de  $S(w)$  son las aplicaciones armónicas.

En el formalismo LAGRANGEANO de cuantización se considera la integral de línea formal sobre todas las aplicaciones  $w: \Sigma \rightarrow \mathbb{W}$ ,

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{w: \Sigma \rightarrow \mathbb{W}} e^{-S/\alpha'}.$$

Aquí la constante  $\alpha'$  juega el papel de constante PLANCK en la superficie mundi,  $\Sigma$ , de la cuerda. Puede absorberse en el volumen del  $\mathbb{W}$  designado, reescalando la métrica según  $g \rightarrow \alpha' \cdot g$ . Por consiguiente, el límite semiclassical  $\alpha' \rightarrow 0$  es equivalente al límite  $\text{vol}(\mathbb{W}) \rightarrow \infty$ .

### 3.2 Descripción Functorial

En la descripción functorial de Teoría Conformal de Campos, las aplicaciones  $\Phi_{\Sigma}$  se abstraen de la definición de modelo de sigma.

Ahora el punto de partida es una superficie RIEMANN,  $\Sigma$ , arbitraria (cerrada, orientada) con borde. Este borde consiste en una colección de aros orientados. Estos aros se califican como entrantes o salientes dependiendo de cómo concuerda su

## Alberto Mejías

orientación con la de  $\Sigma$ . A cada superficie  $\Sigma$  con  $m$  bordes entrantes y  $n$  salientes se asocia una aplicación lineal

$$\Phi_{\Sigma} = \mathcal{H}_{S^1}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_{S^1}^{\otimes n}.$$

Estas aplicaciones no son independientes pero satisfacen los axiomas de empalme que generalizan la ley de la composición simple (1)

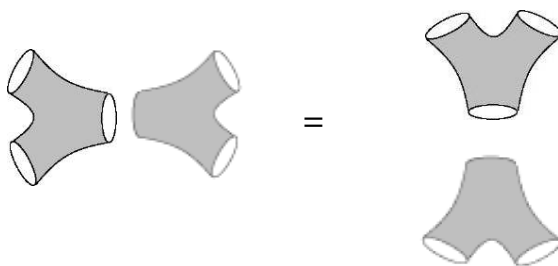
$$\Phi_{\Sigma_1} \circ \Phi_{\Sigma_2} = \Phi_{\Sigma}.$$

donde  $\Sigma$  se obtiene empalmando  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  por sus bordes entrantes y salientes, respectivamente.

De esta manera se obtiene lo que se conoce como un functor modular. Tiene una rica estructura algebraica. Por ejemplo, la esfera con tres agujeros da lugar a un producto

$$\Phi: \mathcal{H}_{S^1} \otimes \mathcal{H}_{S^1} \rightarrow \mathcal{H}_{S^1}.$$

Usando el hecho que una esfera con cuatro agujeros puede obtenerse pegando dos copias de la esfera de tres agujeros se demuestra que este producto es esencialmente conmutativo y asociativo. Para más detalles ver, por ejemplo, [12, 5].



## Matemáticas de Teoría M

### 3.3 Campos B y gavillas

Hay una generalización franca de la acción de modelo de sigma (3.1) que incluye una 2-forma  $B$  sobre  $\mathbb{W}$ . Este llamado campo  $B$  (o  $B$ -campo) agrega una fase extra

$$\exp i \int_{\Sigma} w^* B$$

en la integral de línea. La dos-forma  $B$  debe considerarse como una dos-forma análoga a una conexión. Su curvatura  $H$ , que localmente viene dada por  $H = dB$ , realmente representa a una clase  $[H / 2\pi] \in H^3(\mathbb{W}, \mathbb{Z})$ . Así, más generalmente, si  $\Sigma$  se considera como el borde de una variedad  $\mathbb{V}$  y la aplicación  $w$  se extiende sobre  $\mathbb{V}$ , entonces el factor fase se define como

$$\exp i \int_{\mathbb{V}} w^* H$$

Retrotrayendo  $B$  al espacio de lazos, se ve que actúa como una conexión en un fibrado lineal sobre  $\mathcal{L}\mathbb{W}$ .

Un tal campo  $B$  puede ser considerado como una conexión en una gavilla [9] sobre la variedad  $\mathbb{W}$ . Las gavillas son generalizaciones de fibrados lineales que soportan naturalmente, conexiones de  $p$ -formas. Objetos extensos como cuerdas y branas están estrechamente vinculados a estas teorías de  $p$ -formas.

### 3.4 Cuerdas y gravedad

La manera en que la relatividad general surge de la teoría de cuerdas, es profunda y aquí se usará algún tiempo para explicar esto. Ya se ha visto que, a nivel

## Alberto Mejías

clásico, cada modelo sigma, bidimensional es conformalmente, invariante. Para describir la acción clásica y la resultante ecuación de movimiento (la condición de las aplicaciones armónicas) para aplicaciones  $\Sigma \rightarrow \mathbb{W}$  sólo se necesita la estrella HODGE o una estructura conformal sobre  $\Sigma$ . Esto ya no es verdad a nivel cuántico. Heurísticamente, se necesita una métrica completa  $\gamma$  sobre  $\Sigma$  para definir la medida en la integral de línea sobre todas las aplicaciones  $\Sigma \rightarrow \mathbb{W}$  y esta dependencia métrica, de la integral de línea destruye la invariancia conformal de la Teoría Cuántica.

Así que la función de partición realmente es una función de ambas métricas  $g$  sobre  $\mathbb{W}$  y  $\gamma$  sobre  $\Sigma$ . Ahora se puede considerar un reescalamiento (constante)

$$\gamma \rightarrow \mu \cdot \lambda$$

de la métrica de la superficie mundi y determinar la  $\mu$  - dependencia de la función de partición  $\Phi(g, \gamma)$ . En general se encuentra un resultado distinto de cero.

El sorprendente resultado de teoría de renormalización estándar en Teoría Cuántica de Campos, es que un reescalamiento en  $\gamma$  puede absorberse en una redefinición de la métrica  $g$  en  $\mathbb{W}$ . Esto lleva a la famosa ecuación de flujo del grupo de renormalización [14]

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \int_{\mathbb{W}} \beta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \right] Z = 0.$$

Aquí la función beta  $\beta_{\mu\nu}$  es un campo vectorial sobre el espacio  $MET(\mathbb{W})$  de métricas RIEMANN sobre  $\mathbb{W}$ .

## Matemáticas de Teoría M

Este efecto puede observarse más fácilmente, en una expansión semiclásica del modelo sigma en  $\alpha'$ . Es decir, se considera aplicaciones que son aproximadamente constantes

$$w = w_0 + \xi$$

con  $\xi: \Sigma \rightarrow Tw_0\mathbb{W}$ . En esta aproximación la acción puede escribirse (esquemáticamente) como

$$\int g_{\mu\nu}(w_0) d\xi^\mu \wedge *d\xi^\nu + R_{\mu\nu\lambda\rho}(w_0) \xi^\mu \xi^\nu \xi^\lambda \wedge *d\xi^\rho.$$

Aquí la curvatura RIEMANN  $R_{\mu\nu\lambda\rho}$  se puede considerar como una pequeña perturbación en el límite de gran volumen. En la expansión de orden uno se encuentra que

$$\beta_{\mu\nu} = \alpha' R_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha'^2).$$

Así, a este nivel de aproximaciones, la métrica RICCI plana con

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

corresponde a las TCC's Cuánticas.

Una propiedad importante de la función  $\beta$  es que es un campo vectorial gradiente en  $MET(\mathbb{W})$

$$\beta = \nabla S, \quad S = \int \sqrt{g} R(g)$$

donde  $S$  es la acción EINSTEIN-HILBERT para la métrica  $g$  en  $\mathbb{W}$ . Las Teorías Conformes de Campos vienen dadas por ceros de  $\beta$  y, así, corresponden a los puntos

## Alberto Mejías

críticos de  $S$ . En este sentido una TCC Cuántica corresponde a una solución semi-clásica de gravedad.

### 3.5 Geometría 'encordada' y T-dualidad

Los modelos sigma bidimensionales dan una deformación monoparamétrica natural, de Geometría Clásica. El parámetro de deformación es la constante PLANCK  $\alpha'$ . En el límite  $\alpha' \rightarrow 0$ , se localizan los lazos constantes y se recupera la Mecánica Cuántica o Teoría de Partículas Puntuales. Los lazos no constantes contribuyen para  $\alpha'$  distinto de cero.

Esta estructura es de lo más familiar ahora, en la forma de cohomología cuántica para variedades KAHLER. Bajo circunstancias convenientes la integral de línea localiza aplicaciones holomorfas ponderadas por un factor de fase  $q^d$ , donde  $d$  es el grado y  $q = e^t$  con  $t$  la retrotraída de la forma KAHLER complejificada  $\frac{\omega}{\alpha'} + iB$ .

Así las aplicaciones de TCC,  $\Phi_\Sigma$ , tienen una expansión típica [3]

$$\Phi_\Sigma = \sum_d q^d N_\Sigma(d)$$

donde  $N_\Sigma(d)$  cuenta el número de aplicaciones holomorfas  $\Sigma \rightarrow \mathbb{W}$ . Puesto que, esencialmente,  $q \sim e^{-1/\alpha'}$  se ve que estas correcciones no son perturbacionales desde un punto de vista desde la superficie mundi. Allí son invisibles en una expansión Taylor con respecto  $\alpha'$ .

De hecho se puede describir al espacio de módulos de las TCC's, aproximadamente como sigue. Tendrá componentes a que pueden describirse con respecto a un espacio de configuración  $\mathbb{W}$ . Para estos modelos, los módulos parametrizan

## Matemáticas de Teoría M

métricas RICCI planas más una opción de B-campo. Estos componentes tienen un borde 'al infinito' que describe variedades de gran volumen. Se puede usar el parámetro  $\alpha'$  como coordenada transversa local en el cuello alrededor de este borde. Al alejarse de este borde, hay que hacer las correcciones cordales.

En el medio del espacio de módulos pueden tener lugar fenómenos exóticos. Por ejemplo, el grupo de automorfismos de la TCC puede saltar, lo que da lugar a singularidades de orbifold en los puntos de simetría mejorados.

El más llamativo de los fenómenos es que el espacio de módulos puede tener otro borde que permite otra interpretación semiclassical con respecto a una segunda geometría clásica  $\widehat{\mathbb{W}}$ . Estos puntos lucen como volúmenes cuánticos o pequeños con respecto a las variables originales en  $\mathbb{W}$ ; pero, también pueden interpretarse como grandes volúmenes con respecto a un conjunto de variables duales sobre una variedad dual o reflejo  $\widehat{\mathbb{W}}$ . En este caso se habla de una T-dualidad o dualidad T. De esta manera se relacionan dos variedades  $\mathbb{W}$  y  $\widehat{\mathbb{W}}$  ya que ellas dan lugar a la misma TCC.

El ejemplo más simple de tal una T-dualidad ocurre para la compactificación toroidal. Si  $\mathbb{W} = \mathbb{T}$  es un toro, las TCC's sobre  $\mathbb{T}$  y su dual  $\mathbb{T}^*$  son isomorfas. Esto se explicará con más detalle en §5.

### 4 Teoría M y Branas

Se ha visto cómo la TCC da lugar a una estructura rica con respecto a la geometría modular formulada en términos de aplicaciones  $\Phi_\Sigma$ . Para ir desde TCC a Teoría Cordal hay que dar dos pasos más.



## Alberto Mejías

### 4.1 Suma sobre topologías cordales

Primero, hay que generalizar a la situación dónde las aplicaciones  $\Phi_\Sigma$  no son sólo funciones sobre el espacio de módulos,  $\mathcal{M}_{g,n}$ , de superficies RIEMANN, sino formas diferenciales más generales. De hecho, es particularmente interesante el caso dónde ellas son formas volumen, ya que permiten definir las llamadas amplitudes cordales como

$$A_g = \int_{\mathcal{M}_g} \Phi_\Sigma.$$

Ésta también es la definición general de invariantes GROMOV-WITTEN [12].

Aunque se ha suprimido la dependencia con respecto a los módulos de TCC, se debe comprender que las amplitudes  $A_g$  (ahora asociadas a una superficie *topológica* de género  $g$ ) todavía tiene (entre otras) dependencia de  $\alpha'$ .

Segundo, no basta considerar una amplitud cordal de una topología dada. Así como en Teoría de Campos se suma sobre todos los posibles grafos FEYNMAN, en Teoría Cordal hay que sumar sobre todas las topologías de la superficie mundi de la cuerda. De hecho, hay que ensamblar al conjunto de estas amplitudes en una función generadora.

$$A(\lambda) \approx \sum_{g \geq 0} \lambda^{2g-2} A_g.$$

Aquí se introduce la llamada constante de acoplamiento cordal  $\lambda$ . Desgraciadamente esta función generadora puede ser, a lo sumo, una expansión en serie asintótica de una función analítica  $A(\lambda)$ . Un estimado grosero del volumen de  $\mathcal{M}_g$  muestra que, típicamente,

## Matemáticas de Teoría M

$$A_g \sim 2g!$$

De hecho, argumentos de Física General determinan que las amplitudes no perturbativas  $A(\lambda)$  tienen correcciones de la forma

$$A(\lambda) = \sum_{g \geq 0} \lambda^{2g-2} A_g + \mathcal{O}(e^{-1/\lambda}).$$

Claramente, para acercarse la definición apropiada de las amplitudes cordales, estas correcciones no perturbativas tienen que ser comprendidas.

### 4.2 Teoría M

Se considerarán dos nuevas ideas notables.

1. La Teoría cordal no es una teoría de cuerdas. No basta considerar los espacios de lazos. Hay que incluir otros objetos extendidos, colectivamente conocidos como branas. Se puede intentar pensar en estos objetos como asociados a aplicaciones más generales  $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  donde  $\mathbb{V}$  es un espacio de dimensión superior. Pero, el problema es que no hay una cuantización consistente que parta de 'pequeñas' branas a lo largo de las líneas de Teoría de Cuerdas, es decir, una expansión donde se pueda controlar el tamaño de  $\mathbb{V}$  (a través de  $\alpha'$ ) y la topología (a través de  $\lambda$ ). Sin embargo, mediante el formalismo de D-branas [13] éstos pueden analizarse exactamente en la teoría perturbacional de cuerdas.
2. Como se ha enfatizado, las amplitudes  $A$  dependen de muchos parámetros o módulos. Aparte del acoplamiento cordal  $\lambda$ , todos los otros módulos tienen una interpretación geométrica, con respecto a la métrica y al  $B$ -campo en  $\mathbb{W}$ . El segundo nuevo ingrediente es la visión de que se puede dar a la teoría de cuerdas sobre  $\mathbb{W}$ ,

## Alberto Mejías

con acoplamiento cordal  $\lambda$ , una realización totalmente geométrica en términos de una nueva teoría (llamada M-teoría o Teoría M) sobre la variedad  $\mathbb{W} \times S^1$  donde la longitud del aro  $S^1$  es  $\lambda$  [18].

### 5 Compactificaciones Toriles

Cómo se puede ver hay una jerarquía natural de geometrías generalizadas, ordinariamente asociadas a partículas, cuerdas y branas. Conforme a este punto de vista una variedad 'clásica' puede ser considerada como un elemento de tres categorías diferentes. Vista como un objeto en una de tales categorías, puede heredar diferentes simetrías.

Aunque todavía no se puede dar una definición completamente rigurosa de qué es teoría M, se sabe qué tipo de datos se quiere asociar a un espacio  $\mathbb{W}$ . Estos datos contienen por lo menos lo siguiente

1. Un espacio modular  $\mathcal{M}$  de estructuras geométricas en  $\mathbb{W}$ . Esta puede ser una métrica RICCI plana, pero, también,  $B$ -campos o sus generalizaciones.
2. Un retículo de cargas,  $\Gamma$ , que rotula los varios sectores de la teoría.
3. Un grupo de simetrías, discreto,  $G$ , (el grupo de dualidad) que actúa sobre el retículo  $\Gamma$ , que, típicamente, formará una representación irreducible.
4. Un fibrado de un espacio HILBERT

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{H}(\gamma)$$

sobre el espacio modular  $\mathcal{M}$ , graduado por el retículo de cargas  $\Gamma$ .

Esta jerarquía de estructuras puede ilustrarse muy bien con una clase muy simple de variedades: los  $n$ -toros, escritos como cocientes

## Matemáticas de Teoría M

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}^n / R$$

con  $R$  un retículo de rango  $n$ .

### 5.1 Partículas en un toro

Los estados de una partícula puntual, mecánico-cuántica, en  $\mathbb{T}$ , son rotulados convenientemente por su momento

$$p \in R^*.$$

Las funciones de onda  $e^{ipw}$  forman una base de  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T})$  que diagonaliza al HAMILTONiano  $H = -\Delta = p^2$ . Así que se puede escribir

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{p \in R^*} \mathcal{H}(p)$$

donde las partes graduadas  $\mathcal{H}(p)$  son monodimensionales. Hay una acción natural del grupo de simetría

$$G = SL(n, \mathbb{Z}) = \text{Aut } R$$

sobre el retículo  $\Gamma = R$  y el espacio HILBERT  $\mathcal{H}$ . (Estas transformaciones, en general, no dejarán invariante a la métrica, sino que, más bien, darán por retrotracción otra métrica plana en  $\mathbb{T}$ .)

### 5.2 Cuerdas sobre un toro

En el caso de una cuerda que se mueve sobre el toro  $\mathbb{T}$ , los estados también se rotulan por su número de devanado

$$r \in R.$$

## Alberto Mejías

El número de devanado simplemente distingue los varios componentes conexos del espacio de lazos  $\mathcal{L}\mathbb{T}$ , ya que

$$\pi_0 \mathcal{L}\mathbb{T} = \pi_1 \mathbb{T} \cong R.$$

Por tanto, se ve una ocurrencia natural del llamado retículo NARAIN

$$\Gamma^{n,n} = R \oplus R^*.$$

Éste es un retículo autodual, par, de signatura  $(n, n)$  con producto interno

$$p = (r, k), \quad q^2 = 2r \cdot k.$$

Resulta que las simetrías del retículo  $\Gamma^{n,n}$  se elevan a simetrías de toda la teoría conformal de campos. Los grupos de simetría

$$SO(n, n, \mathbb{Z}) = \text{Aut } \Gamma^{n,n}$$

se llaman las  $\mathbb{T}$ -dualidades. Un ejemplo particular es el intercambio  $\mathbb{T} \leftrightarrow \mathbb{T}^*$ . Desde esta perspectiva, puede considerarse que la cuerda se mueve sobre el espacio  $\mathbb{T} \times \mathbb{T}^*$ . Si se considera estados quirales o BPS en la supercuerda, entonces el espacio HILBERT graduado  $\mathcal{H}(q)$  viene dado por

$$\mathcal{H}(p) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}p^2\right),$$

con respecto al espacio FOCK

$$\mathcal{F}_q = \bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n}(\mathbb{R}^8) \otimes \Lambda_{q^n}(\mathbb{R}^8) = \bigoplus_{n \geq 1} q^N \mathcal{F}(N).$$

## Matemáticas de Teoría M

Nótese que el diagrama DYNKIN de la correspondiente álgebra LIE  $D_n \cong so(n, n)$  se obtiene a partir de  $A_{n-1} \cong sl(n)$ , agregando una raíz extra. Las reflexiones en esta raíz representan la  $\mathbb{T}$ -dualidad que aplica  $\mathbb{T}$  a  $\mathbb{T}^*$ .

### 5.3 Branas en un toro

Al considerar de lleno la M-teoría, el retículo de cargas se vuelve más complicado. Para valores pequeños de  $n$  ( $n \geq 4$ ), se puede escribir como

$$\Gamma^{n,n} \oplus H^{par/impar}(\mathbb{T}).$$

Aquí se aprecia que el retículo de branas (que son pares o impares dependiendo del tipo de teoría de cuerdas que se considere)

$$H^{par/impar}(\mathbb{T}) \cong \Lambda^{par/impar} L^*,$$

transforma como semiespinores las representaciones bajo el grupo de  $\mathbb{T}$ -dualidad  $SO(n, n, \mathbb{Z})$ . El grupo de dualidad completo, resulta ser el grupo excepcional sobre los enteros

$$E_{n+1}(\mathbb{Z}).$$

Así se ve que la jerarquía se refleja en los grupos de simetría

$$SL(n, \mathbb{Z}) \subset SO(n, n\mathbb{Z}) \subset E_{n+1}(\mathbb{Z})$$

de rangos  $n-1$ ,  $n$  y  $n+1$  respectivamente. Ya es muy profunda (y generalmente no contestada) la pregunta de cuál es la estructura matemática 'correcta' asociada a un  $n$ -toro, que da lugar al grupo  $E_{n+1}(\mathbb{Z})$ .

## Alberto Mejías

En este caso, también se tiene evidencia indirecta de cómo debe comportarse el espacio HILBERT graduado  $\mathcal{H}$ . Si se considera los llamados estados BPS las partes graduadas  $\mathcal{H}(\gamma)$  deben ser finito-dimensionales y para  $\gamma$  grande se puede estimar su crecimiento

$$\dim H(\gamma) \sim \exp S(\gamma)$$

donde  $S(\gamma)$  es la entropía. Argumentos de física de agujeros negros establecen que

$$S(\gamma) = \sqrt{Q(\gamma)},$$

con  $Q(\gamma)$  un invariante algebraico del grupo de dualidad  $G$ . Por ejemplo, para  $n = 5$  con  $G = E_6$ , el retículo  $\Gamma$  tiene rango 26 y  $Q$  es la famosa invariante cúbica. Similarmente, para  $n = 6$  y  $G = E_7$ , se obtiene la invariante cuártica de la representación 56-dimensional.

## 6 D-Branas

El ingrediente crucial para extender la Teoría de Cuerdas más allá de la Teoría de Perturbación, es D-branas [13]. Desde un punto de vista matemático, D-branas puede ser considerado como una versión relativa de la Teoría GROMOV-WITTEN. El punto de partida es ahora un par de variedades relativas  $(\mathbb{W}, \mathbb{V})$  con  $\mathbb{W}$  una variedad  $d$ -dimensional y  $\mathbb{V} \subset \mathbb{W}$ , cerrada. Las superficies mundi de la cuerda se definen como superficies RIEMANN  $\Sigma$  con borde  $\partial\Sigma$  y la clase de aplicaciones  $w: \Sigma \rightarrow \mathbb{W}$ , debe satisfacer

## Matemáticas de Teoría M

$$w(\partial\Sigma) \subset \mathbb{V}.$$

Es decir, el borde de las superficies Riemann debe aplicarse al subespacio  $\mathbb{V}$ .

Nótese que en una descripción functorial, ahora, hay dos tipos de bordes de superficie. Primero, hay los bordes tipo tiempo recién descritos. Aquí se escoge una condición de borde definida, a saber, que la cuerda quede en la D-brana  $\mathbb{V}$ .

Segundo, hay bordes tipo espacio que se han considerado antes. Éstos son un ingrediente esencial en cualquier descripción HAMILTONiana. Sobre estos bordes se escogen condiciones de valores iniciales que se propagan con el tiempo. En la teoría de cuerdas cerradas estos bordes son cerrados y por consiguiente son sumas de aros. Con D-branas hay un segundo tipo de borde: la cuerda abierta con el intervalo  $I = [0,1]$ .

La ocurrencia de dos tipos de bordes tipo espacio, puede comprenderse porque hay varias maneras de escoger una coordenada 'tiempo' en una superficie RIEMANN con borde. Localmente una tal superficie siempre luce como  $S^1 \times \mathbb{R}$  ó  $I \times \mathbb{R}$ .

Esta ambigüedad de cómo tajar a la superficie, es un nuevo ingrediente poderoso en la teoría de cuerdas abiertas.

A la TCC descrita por el par  $(\mathbb{W}, \mathbb{V})$ , se asociará una categoría modular extendida. Tiene dos tipos de objetos o 1-variedades: el aro  $S^1$  (la cuerda cerrada) y el intervalo  $I = [0,1]$  (la cuerda abierta). Los morfismos entre dos 1-variedades son de nuevo bordismos o superficies RIEMANN  $\Sigma$ , ahora con un posible borde. Ahora se



## Alberto Mejías

tienen dos tipos de espacios HILBERT: cuerdas cerradas  $\mathcal{H}_{S^1}$  y las cuerdas abiertas  $\mathcal{H}_I$ .

Semiclásicamente, el espacio HILBERT cuerda abierta viene dado por

$$\mathcal{H}_I = L^2(\mathbb{V}, \mathcal{F})$$

con fibrado de espacio FOCK

$$\mathcal{F} = \bigotimes_{n \geq 1} S_{q^n}(T\mathbb{W}).$$

Nótese que se tiene una sola copia del espacio FOCK  $\mathcal{F}$ , las condiciones de contorno al final del intervalo, relacionan las levomotrices y las dextromotrices. Además, los campos son secciones del fibrado de espacio FOCK sobre la D-brana  $\mathbb{V}$ , no sobre toda la variedad espaciotiempo  $\mathbb{W}$ . En este sentido los estados de cuerdas abiertas, se localizan en la D-brana.

Se ha visto que un nuevo ingrediente importante en el paso de la geometría clásica a la geometría 'encordada', es el campo de 2-forma  $B$ , técnicamente una conexión sobre una gavilla. Se acopla a la hoja mundi de la cuerda vía

El factor de fase

$$\exp i \int_{\Sigma} B$$

## Matemáticas de Teoría M

que aparece en la integral de línea, debe considerarse como la generalización de la holonomía de una conexión en un fibrado lineal asociado a un lazo. Satisface un invariancia de calibración

$$B \rightarrow B + d\Lambda.$$

Si ahora, se trabaja en la categoría de superficies RIEMANN con bordes, se ve que tales aplicaciones no son invariantes por calibración, sino que escogen un factor de fase

$$\exp i \int_{\partial\Sigma} \Lambda.$$

Sin embargo, en las superficies con borde, se puede ponderar la integral de línea con un factor de fase, extra. Sea  $A$  una conexión (en un fibrado lineal trivial) en  $\mathbb{V}$ .

Entonces se puede agregar el factor de fase de holonomía

$$\exp i \int_{\partial\Sigma} \Lambda.$$

Ahora se puede ver que el sistema tiene un invariancia de calibración generalizada dónde aparte de la transformación de  $B$ , se tiene

$$A \rightarrow A - \Lambda.$$

Esto lleva a una noción generalizada de curvatura invariante por calibración

$$F = dA + B.$$

Esta ecuación implica inmediatamente que, restringida a la D-brana  $\mathbb{V}$ , la curvatura  $H = dB$  debe desaparecer.

## Alberto Mejías

### 6.1 Branas y matrices

Uno de los hechos más notables es que las D-branas puede estar dotadas de una multiplicidad  $N$  que, naturalmente, lleva a una estructura no abeliana [19].

Dada una categoría modular como se ha descrito anteriormente, hay una manera simple, en que ésta puede ser tensorada sobre las matrices HERMITEANAS  $N \times N$ .

Simplemente se reemplaza al espacio HILBERT  $\mathcal{H}_I$  asociado al intervalo  $I$  por

$$\mathcal{H}_I \text{Mat}_{N \times N}$$

con la condición de HERMITECIDAD

$$(\psi \otimes M_{IJ})^* = \psi^* \otimes M_{IJ}.$$

Las aplicaciones  $\Phi_\Sigma$  se generalizan como sigue. Para simplificar, considérese, primero, a una superficie  $\Sigma$  con un solo borde  $C$ . Supóngase que  $C$  contiene  $n$  espacios HILBERT de cuerdas abiertas 'entrantes', con los estados  $\psi_1 \otimes M_1, \dots, \psi_n \otimes M_n$ . Estos estados ahora tienen valores matriciales. Así, el nuevo morfismo está definido como

$$\Phi_\Sigma(\psi_1 \otimes M_1, \dots, \psi_n \otimes M_n) = \Phi_\Sigma(\psi_1, \dots, \psi_n) \text{Tr}(M_1, \dots, M_n).$$

En caso de más de un componente de borde, simplemente se tiene una traza adicional por cada componente.

En particular se puede considerar el diagrama de disco con tres inserciones de cuerdas abiertas. Considerando esto como una aplicación

## Matemáticas de Teoría M

$$\Phi_{\Sigma} : \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_I \rightarrow \mathcal{H}_I,$$

se ve que este vértice de interacción de cuerdas abiertas viene dado ahora, por

$$\Phi_{\Sigma}(\psi_1 \otimes M_1, \psi_2 \otimes M_2) = (\psi_1 * \psi_2)(M_1 M_2).$$

Así se ha tensorado producto cordal asociado, con la multiplicación matricial.

Si se considera el límite geométrico dónde la TCC se piensa como el modelo sigma semiclásico sobre  $\mathbb{W}$ , los campos cordales que corresponden a los estados en el espacio HILBERT de cuerda abierta  $\mathcal{H}_I$  se volverán campos con valores matriciales sobre la D-brana  $\mathbb{V}$ , esto es, pueden ser considerados como secciones de  $End(E)$  con  $E$  un fibrado vectorial (trivial) sobre  $\mathbb{V}$ .

Esta estructura matricial aparece naturalmente si se consideran  $N$  D-branas diferentes  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_n$ . En tal caso, se tiene una matriz de cuerdas abiertas que se estiman desde la brana  $\mathbb{V}_I$  a la  $\mathbb{V}_J$ . En este caso no hay ninguna descripción de fibrado vectorial obvia. Pero, si todas los D-branas coinciden,  $\mathbb{V}_1 = \dots = \mathbb{V}_N$ , aparece una simetría  $U(N)$ .

### 6.2 D-branas y K-teoría

La relación con fibrados vectoriales ha demostrado ser sumamente poderosa. El próximo paso es considerar D-branas con fibrados vectoriales *no triviales*. Resulta que estas configuraciones pueden ser consideradas como compuestas de bra-

## Alberto Mejías

nas de varias dimensiones [7]. Hay una fórmula precisa que relaciona la topología fibrado vectorial  $E$  con la carga de la brana  $\mu(E)$  que puede ser considerada como una clase en  $H^*(\mathbb{W})$ . (Por conveniencia se considerarán primero las branas máximas  $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ .) Se escribe [10]

$$\mu(E) = ch(E) \widehat{A}^{1/2} \in H^*(\mathbb{W}). \quad (2)$$

Aquí  $ch(E)$  es el carácter CHERN (generalizado)  $ch(E) = \text{Tr} \exp(F/2\pi i)$  y  $\widehat{A}$  es el género que aparece en el teorema del índice de ATIYAH-SINGER. Nótese que la carga de la D-brana puede ser fraccionaria.

Branas de menor dimensión, pueden describirse empezando con dos branas de la mayor dimensión, con fibrados vectoriales  $E_1$  y  $E_2$ , de cargas opuestas. Físicamente dos de tales branas se aniquilarán dejando atrás una colección de branas de menor dimensión. Matemáticamente el objeto resultante debe ser considerado como un fibrado virtual  $E_1 \ominus E_2$  que representa a una clase en el grupo de K-teoría  $K^0(\mathbb{W})$  de  $\mathbb{W}$  [20]. De hecho la aplicación  $\mu$  en (2) es una correspondencia muy conocida

$$\mu: K^0(\mathbb{W}) \rightarrow H^{even}(\mathbb{W})$$

que es un isomorfismo cuando es tensorado con los reales. En este sentido hay una aplicación 1-a-1 entre las D-branas y las clases de K-teoría [20]. Esta relación con la K-teoría ha demostrado ser muy útil.

## Matemáticas de Teoría M

### 6.3 Ejemplo: el teorema del índice

Un buen ejemplo del poder de interpretación entre cuerdas abiertas y cerradas, es la emergencia natural del teorema del índice. Considérese el cilindro  $\Sigma = S^1 \times I$  entre dos D-branas descritas por fibrados vectoriales (virtuales)  $E_1$  y  $E_2$ . Esto se puede ver como diagrama de cuerda cerrada con estado entrante  $|E_1\rangle$  y estado saliente  $|E_2\rangle$

$$\Phi_\Sigma = \langle E_1 | E_2 \rangle.$$

Interpretando el estado del borde de la D-brana en términos de estados fundamentales de cuerdas cerradas (dados por las clases de cohomología) se tiene

$$|E\rangle = \mu(E) \in H^*(\mathbb{W}).$$

Así que

$$\Phi_\Sigma = \int_{\mathbb{W}} ch(E_1) ch(E_2^*) \hat{A}.$$

Por otro lado también se puede ver al cilindro como una traza sobre los estados de cuerdas abiertas, con condiciones de contorno rotuladas por  $E_1$  y  $E_2$ . Los estados fundamentales en  $\mathcal{H}_I$  son secciones del fibrado espinor DIRAC torcidas por

$E_1 \otimes E_2^*$ . Esto da

$$\Phi_\Sigma = \text{Tr} \mathcal{H}_I (-1)^F = \text{índice}(D_{E_1 \otimes E_2^*}).$$

Así que el teorema del índice sigue elementalmente.

## 7 U-dualidad

Se ha indicado que en la teoría M no se busca incluir sólo cuerdas, sino también, D-branas (e incluso otros objetos extensos que no se discutirán aquí, como NS

## Alberto Mejías

5-branas y monopolos KALUZA-KLEIN). Así, en el límite de pequeños acoplamientos cordales  $\lambda$ , todo el espacio HILBERT cordal (con segunda cuantización) luciría como

$$\mathcal{H} = S^*(\mathcal{H}_{cuerda}) \otimes S^*(\mathcal{H}_{brana}).$$

Claro que nuestra discusión hasta ahora ha sido muy sesgada. En la teoría total habrá simetrías, llamadas U-dualidades o dualidades U, que intercambiarán cuerdas y branas.

En la actualidad hay muy pocas formulaciones de M-teoría que presenten un tal acercamiento de manifiestos invariantes por dualidad. Sólo para la teoría matricial [1] de compactificaciones muy especiales (como las de toros de baja dimensión) o la famosa correspondencia AdS-TCC [11], se da una definición precisa, no perturbacional.

Aquí se dará un ejemplo bastante simple de una tal simetría que aparece al compactificar la supercuerda (Tipo IIA) en un 4-toro  $\mathbb{T}^4 = \mathbb{R}^4/L$ . En este caso, el retículo de cargas tiene rango 16 y puede escribirse como

$$\Gamma^{4,4} \oplus K^0(\mathbb{T}^4).$$

Forma una representación espinorial irreducible bajo el grupo de U-dualidad

$$G = SO(5,5, \mathbb{Z}).$$

Nótese que el subgrupo de T-dualidad  $SO(4,4, \mathbb{Z})$  tiene tres representaciones inequivalentes 8-dimensionales (relacionadas por triality). Las cuerdas con retículo NARAIN  $\Gamma^{4,4}$  se transforman en la representación vectorial, mientras que las branas

## Matemáticas de Teoría M

par-dimensionales, rotuladas por el K-grupo  $K^0(\mathbb{T}^4) \cong \wedge^{par} L^*$ , se transforman en la representación espinorial. (Las D-branas impar-dimensionales, que son rotuladas por  $K^1(\mathbb{T})$  y que aparecen en la teoría Tipo IIB, se transforman en la representación espinorial conjugada).

Para calcular el espectro de supercuerdas hay que introducir el correspondiente espacio FOCK. Viene dado por

$$\mathcal{F}_q = \bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n}(\mathbb{R}^8) \otimes \Lambda_{q^n}(\mathbb{R}^8) = \bigoplus_{n \geq 1} q^N \mathcal{F}(N).$$

El espacio HILBERT de cuerdas BPS, con momenta adquiridos  $p \in \Gamma^{4,4}$ , viene dado, entonces, por

$$\mathcal{H}_{cuerda}(p) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}p^2\right).$$

Para D-branas se toma un enfoque completamente diferente. Puesto que el sistema sólo está aclarado para acoplamientos cordales pequeños, hay que usar métodos semiclásicos. Considérese una D-brana que corresponde a una clase de K-teoría, E, con vector de carga  $\mu = ch(E) \in H^*(\mathbb{T})$ . A tal fibrado vectorial, se puede asociar un espacio modular  $\mathcal{M}_{\mu}$  de conexiones auto-duales. (Si se trabajara en el contexto holomórfal, se podría considerar igualmente bien los espacios modulares de haces holomorfos de esta clase topológica). Ahora, afortunadamente, se sabe mucho sobre estos espacios modulares. Ellos son hiperKAHLER y (para  $\mu$  primitivo)



## Alberto Mejías

tersos. De hecho, ellos son, topológicamente, esquemas HILBERT [11] que son deformaciones de productos simétricos

$$\mathcal{M}_\mu \cong \text{Hilb}^{\mu^{2/2}}(\mathbb{T}^4) \sim S^{\mu^{2/2}}(\mathbb{T}^4).$$

Determinando los estados BPS mediante cuantización geométrica se encuentra que

$$\mathcal{H}_{brana}(\mu) = H^*(\mathcal{M}_\mu).$$

Se han determinado las cohomologías de estos espacios de módulos [8] con el resultado de que

$$\bigotimes_{n \geq 1} q^N H^*(\text{HILB}^N(\mathbb{T}^4)) = \mathcal{F}_q.$$

Esto da el resultado final

$$\mathcal{H}_{brana}(\mu) = \mathcal{F}(\mu^2/2) \cong \mathcal{H}_{cuerda}(p)$$

donde  $\mu$  y  $p$  están relacionados por una transformación de U-dualidad  $SO(5,5, \mathbb{Z})$ .

## 8 Geometría No Conmutativa

Desde el punto de vista presente, las D-branas y las cuerdas abiertas correspondientes, parecen indicar que en una más acabada formulación de M-teoría, la Geometría No Conmutativa ha jugado un papel fundamental [2], [17]. Una de las indicaciones es la ocurrencia de campos  $B$  en la teoría de cuerdas. Aproximadamente en la presencia de un tal B-campo (constante) las coordenadas de espacio-tiempo ya no conmutan, sino que, más bien, satisfacen

$$[w_\mu, w_\nu] = B_{\mu\nu}.$$

## Matemáticas de Teoría M

Uno de los resultados más llamativos es que la teoría de calibración de las D-branas, en la presencia de un tal B-campo, de hecho, es invariante bajo el grupo de T-dualidad mediante el concepto de equivalencia MORITA. Exploraciones adicionales de los eslabones entre la Teoría de cuerdas y Geometría no Conmutativa, bien pueden dar la clave para una última comprensión de M-teoría.

### Referencias

- [1]BANKS, T. FISCHLER, W. SHENKER, S. H. and SUSSKIND, L. *M Theory as a matrix model: a conjecture*. Phys. Rev. **D55** (1997) 5112-5128. hep-th/9610043.
- [2]CONNES, A. DOUGLAS, M. and SCHWARZ, A. *Noncommutative geometry and matrix theory: compactifications on tori*. JHEP **9802** (1998) 003. hep-th/9711162.
- [3]COX, D. A. and KATZ, S. *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry* (Mathematical Surveys and Monographs, No. 68.). AMS. 1999.
- [4]DI FRANCESCO, Ph. MATHIEU, P. and SENECHAL, D. **Conformal Field Theory** (Graduate Texts in Contemporary Physics). Springer. 1996.
- [5]DIJKGRAAF, R. *Les Houches Lectures on Fields, Strings and Duality, in Quantum, Symmetries*. Les Houches Session LXIV. Eds. A. Connes, K. Gawedzki, and J. ZinnJustin. North-Holland. 1998. hep-th/9703136.
- [6]Dijkgraaf, R. *The Mathematics of M-Theory*. Proceedings of the 3rd European Congress of Mathematics. Barcelona. 2000. Progress in Mathematics. Birkhuser Verlag.
- [7] DOUGLAS, M. *Branes within branes*. hep-th/9512077.
- [8]GOTTSCHE, L. *The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface*. Math. Ann. **286** (1990) 193-207; **Hilbert Schemes of Zero-dimensional Sub-schemes of Smooth Varieties**. Lecture Notes in Mathematics **1572**. Springer-Verlag. 1994.
- [9]GREEN, M. HARVEY, J. and MOORE, G. *I-brane inflow and anomalous couplings on D-branes*. Class. Quant. Grav. **14** (1997) 47-52. hep-th/9605033.

**Alberto Mejías**

- [10] HITCHIN, N. *Lectures on special Lagrangian submanifolds*. math/9907034.
- [11] HUYBRECHTS, D. *Compact hyperkahler manifolds: basic results*. alg-geom/9705025.
- [12] MALDACENA, J. *The large  $N$  limit of superconformal field theories and supergravity*. Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231-252. hep-th/9711200.
- [13] MANIN, YU. I. **Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology, and Moduli Spaces**. AMS. 1999.
- [14] POLCHINSKI, J. *Dirichlet-branes and Ramond-Ramond charges*. Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724-4727. hep-th/9510017.
- [15] POLCHINSKI, J. **String Theory** (Cambridge Monographs on Mathematical Physics), Cambridge University Press, 1998.
- [16] SEGAL, G. *The definition of conformal field theory*. Preprint. Two dimensional conformal field theories and modular functors, in **IXth International Conference on Mathematical Physics**. B. Simon, A. Truman and I. M. Davies Eds. (Adam Hilger, Bristol, 1989).
- [17] SEIBERG, N. and WITTEN, E. *String theory and noncommutative geometry*. JHEP **9909** (1999) 032. hep-th/9908142.
- [18] SEN, A. and ZWIEBACH, B. Tachyon condensation in string field theory. JHEP **0003** (2000) 002, hep-th/9912249.
- [19] WITTEN, E. *Bound states of strings and  $p$ -branes*. Nucl. Phys. **B460** (1996) 335. hep-th/9510135.
- [20] WITTEN, E. *D-branes and K-theory*. JHEP **9812** (1998) 019, hep-th/9810188.
- [21] WITTEN, E. *String theory in various dimensions*. Nucl. Phys. **B 443** (1995) 85. hep-th/9503124.
- [22] ZWIEBACH, B. *Closed string field theory: quantum action and the  $B$ - $V$  master equation*. Nucl. Phys. **B390** (1993) 33–152, hep-th/9206084.