MÉTODO DE LAS SERIES DE TAYLOR PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES Y NO LINEALES

Profesor: José Albeiro Sánchez Cano

Departamento de Ciencias Básicas

Universidad EAFIT

josanche@eafit.edu.co

Objetivo: Aplicar el método de Taylor para resolver ecuaciones diferenciales, que como se verá es la misma solución que proporciona la solución en series de potencias (o de coeficientes indeterminados). Esto es, si la solución en series de potencias arroja la solución en una formula cerrada, se tendrá entonces que la solución dada por los polinomios de Taylor también entregará dicha solución en forma cerrada.

Por lo tanto, en el caso de solución en puntos ordinarios, debería de enseñarse el método de desarrollo de Taylor, pues viene a ser mucho más cómodo para un estudiante de ecuaciones diferenciales, pues cuando se trabaja con solución mediante series de potencias, el acomodo de los índices de la sumatoria siempre es un poco confuso para ellos. Sin embargo ambos métodos son en esencia los mismos.

Veamos en que consiste cada método.

El método de las series de Taylor para obtener soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales, consiste en calcular las derivadas sucesivas de la ecuación diferencial dada, evaluando las derivadas en el punto inicial x_0 y reemplazando el resultado en la serie de Taylor. La principal dificultad de este método es el cálculo recurrente de las derivadas de orden superior.

El método delas series de potencias o coeficientes indeterminados consiste en suponer una solución en la forma $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (S.P)$. Esta ecuación se deriva tantas veces como sea necesario para obtener expresiones en serie de todas las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial y se reemplazan en la ecuación diferencial dada para obtener los coeficientes a_n. La dificultad de este método es la manipulación de las series que se puedan necesitar y la obtención de los coeficientes de las series.

Pero los métodos son esencialmente los mismos. En efecto, los coeficientes que aparecen en la serie de potencias, a_n y los coeficientes en el método de Taylor , $\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$ vienen relacionados por la formula $a_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$. La solución por el método de Taylor viene dada por $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (S.T)$.

En el libro de ecuaciones diferenciales [1] [1] utilizan ambos métodos para resolver el siguiente problema de valor inicial:

Ejemplo 1. Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx}=e^{-x^2}, \quad y(0)=1 \tag{1.1}$$

Solución.

Observar que la solución de (1.1) se puede escribir como $y(x)=1+\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$

Ya que no hay funciones elementales para calcular la integral anterior, por lo tanto no se podría escribir la solución en forma cerrada y por consiguiente tendríamos que conformarnos con alguna aproximación numérica.

Apliquemos inicialmente el método de Taylor. Para esto debemos calcular las derivadas sucesivas y evaluándolas en $x=0$ para obtener:

[1] [1] Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Un enfoque al cálculo numérico.Charles E. Robertrs Jr.,

$$y''(x) = -2xe^{-x^2} \;; \qquad y''(0) = 0$$
$$y'''(x) = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2} \;; \qquad y'''(0) = -2$$
$$y^{iv}(x) = \left(-8x^3 + 12x\right)e^{-x^2} \;; \qquad y^{iv}(0) = 0$$
$$y^{v}(x) = \left(16x^4 - 48x^2 + 12\right)e^{-x^2} ; \qquad y^{v}(0) = 12$$

Notando que $y(0) = y^{(0)}(0) = 1$ y $y'(0) = 0$ y reemplazando en la ecuación (S.T) se obtiene la solución

$$y(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \cdots \qquad (1.2)$$

Ahora supongamos que la ecuación (1.1) tiene una solución en serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (1.3)$$

haciendo $x = 0$ en la ecuación (1.3) e imponiendo la condición inicial se obtiene $u(0) = 1 = a_0$. Diferenciando la ecuación (1.3), obtenemos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \qquad (1.4)$$

Ya que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n / n!$,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \qquad (1.5)$$

Reemplazando (1.4) y (1.5) en (1.1), encontramos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

o en forma equivalente

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \cdots$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales, encontramos

$$a_1 = 1,\; a_2 = 0,\; a_3 = -\frac{1}{3},\; a_4 = 0,\; a_5 = \frac{1}{10},\; a_6 = 0,\; \cdots$$

En general, se tiene

$$a_{2n} = 0$$
$$a_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!} \quad n = 1,2,3,\cdots$$

De acuerdo con lo anterior, se tiene que la solución en series de potencias viene dada por

$$y(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

La serie converge para todo x real. (criterio de la razón).

Según el autor, debe ser obvio que es más fácil obtener valores adicionales de los coeficientes de la serie utilizando el método de los coeficientes indetermina-dos, que utilizando el método de las series de Taylor. En consecuencia, dice el autor, usualmente se empleará el método de los coeficientes indeterminados, descartando entonces el método de las series de Taylor.

Pero si seguimos trabajando un poco en el ejemplo anterior, por el método de series de Taylor, tenemos

$$y''(x) = -2xe^{-x^2}\ ; \qquad y''(0) = 0$$
$$y'''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}\ ; \qquad y'''(0) = -2 = -\frac{2!}{1!}$$
$$y^{iv}(x) = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}\ ; \qquad y^{iv}(0) = 0$$
$$y^{v}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}\ ; \qquad y^{v}(0) = 12 = \frac{12*2}{2} = \frac{4!}{2!}$$
$$y^{vi}(x) = (-120x + 160x^3 - 32x^5)e^{-x^2}\ ; \qquad y^{vi}(0) = 0$$
$$y^{vii}(x) = (-120 + 720x^2 - 480x^4 + 64x^6)e^{-x^2}\ ; \qquad y^{vii}(0) = -120 = -\frac{12*6}{6} = -\frac{6!}{3!}$$

Se observa la siguiente ley de formación:

$$y^{(2n)} = 0\,,$$
$$y^{(2n-1)} = (-1)^{n-1}\frac{(2(n-1))!}{(n-1)!} \quad n = 1,2,3,\cdots$$

En consecuencia, se tiene los coeficientes

$$a_{2n} = \frac{y^{(2n)}}{(2n)!} = 0\,,$$

$$a_{2n-1} = \frac{y^{(2n-1)}}{(2n-1)!} = (-1)^{n-1}\frac{(2(n-1))!}{(2n-1)!(n-1)!} \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

O bien,

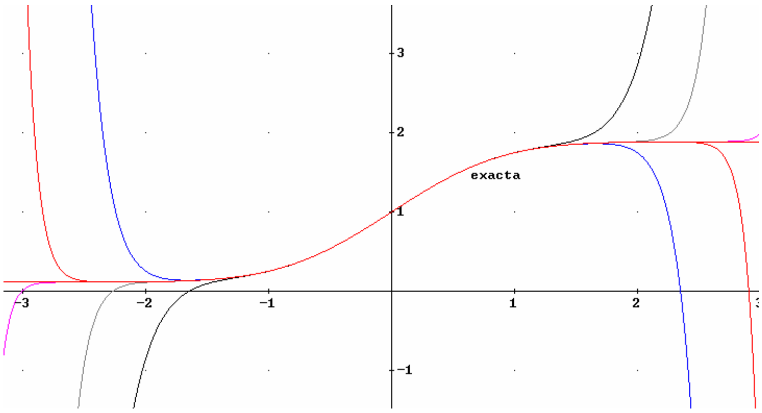
$$a_{2n} = 0\,,$$

$$a_{2n-1} = (-1)^{n-1}\frac{(2(n-1))!}{(2n-1)!(n-1)!} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(2n-1)(2n-2)!(n-1)!}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!(n-1)!}$$

Nuevamente se obtiene la solución encontrada por series de potencias:

$$y(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$



En conclusión, el ejemplo para mostrar que el método de la series de Taylor no produce la misma calidad de las soluciones, no es válido. Es más, el autor dice que el método de Taylor se adapta fácilmente a problemas de valor inicial, lo cual, como veremos más adelante, el método funciona si lo que se quiere resolver es una ecuación diferencial sin condiciones iniciales, con la misma calidad de las soluciones que el método de las series de potencias.

1. Solución en series de Taylor alrededor de un punto ordinario

Las ecuaciones diferenciales homogéneas lineales de segundo orden de la forma

$$P_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_2(x)y=0, \qquad (1)$$

donde P_0, P_1 y P_2 son polinomios. Dichas ecuaciones aparecen en muchas aplicaciones físicas. Algunos ejemplos de estas ecuaciones son:

Ecuación de Legendre: [2]

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\alpha(\alpha+1)y=0, \qquad (2)$$

Ecuación de Airy:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-xy=0, \qquad (3)$$

Ecuación de Chebyshev:

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+\alpha^2y=0, \qquad (4)$$

Ecuación de Hermite:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2\alpha y=0, \qquad (5)$$

La solución de esas ecuaciones, en general, no pueden expresarse en términos de funciones elementales familiares. Por lo cual utilizaremos los polinomios de Taylor.

Definición (punto ordinario) Supongamos que P_0, P_1 y P_2 no tienen factores comunes. Decimos que x_0 es un ***punto ordinario*** de (1) si $P_0(x_0)\neq 0$, o es un ***punto singular*** si $P_0(x_0)=0$.

Para la ecuación de Legendre (2), $x_0=1$ y $x_0=-1$ son puntos singulares y todos los otros puntos son puntos ordinarios.

Para la ecuación de Airy (3), todo punto es ordinario.

Necesitaremos el próximo teorema.

Teorema (existencia de soluciones en series de Taylor)

Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$y''(x) + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

Se pueden encontrar siempre dos soluciones linealmente independientes en la forma de series de Taylor centradas en $x = x_0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!}(x - x_0)$$

Una solución en series de Taylor converge al menos para $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia de x_0 al punto singular más cercano (real o complejo), en tal ca-so se dice que la solución $y(x)$ es una solución alrededor del punto ordinario x_0

Problema: Encontrar las soluciones en serie de potencias en $x - x_0$ para ecuaciones de la forma

$$\left(1 + \alpha(x - x_0)^2\right)\frac{d^2 y}{dx^2} + \beta(x - x_0)\frac{dy}{dx} + \gamma\, y = 0. \qquad (6)$$

Muchas ecuaciones importantes que aparecen en aplicaciones son de esta forma con $x_0 = 0$, incluso la ***ecuación de Legendre*** (2) , la ***ecuación de Ayry*** (3), la ***ecuación de Chebyshev*** (3), y la ***ecuación de Hermite*** (5).

En el ejemplo siguiente se dará la solución en series de Taylor para la ecuación (6), la cual la haremos, sin pérdida de generalidad para el caso $x_0 = 0$.

El ejemplo resultará ilustrativo, ya que mostrará como trabajar en todos los casos.

Ejemplo 2. Encuentre la serie de potencias en x para la solución general de

$$\left(1 + \alpha x^2\right)\frac{d^2 y}{dx^2} + \beta\, x\frac{dy}{dx} + \gamma\, y = 0 \qquad (2.1)$$

Solución:

Buscamos la solución general de la forma

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.2}$$

donde

$$a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots \quad \text{y} \quad a_0 = y(0) = c_0\,, \quad a_1 = y'(0) = c_1 .$$

Para encontrar el coeficiente a_2 , hacemos $x = 0$ en (2.1) y reemplazamos los valores de $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$:

esto es,

$$y''(0) + \gamma\, y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y''(0) = -\gamma\, y(0) = -\gamma\, c_0$$

luego se tiene que $a_2 = \dfrac{y''(0)}{2!} = -\dfrac{\gamma}{2!} c_0$.

Ahora para obtener los coeficientes a_i , $i = 3, 4, \ldots$, deberemos derivar implícitamente con respecto a x la ecuación (2.1) n veces, y sustituir los valores encontrados de los a_i anteriores.

Al derivar la ecuación (2.1) implícitamente con respecto a x, se obtiene:

$$\left(1+\alpha x^2\right)\frac{d^3 y}{dx^3} + (2\alpha+\beta)x\frac{d^2 y}{dx^2} + (\beta+\gamma)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.3}$$

Haciendo $x = 0$ y reemplazando los valores de $y(0), y'(0), y''(0)$ en (3) se tiene:

$$y'''(0) + (\beta+\gamma)y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = -(\beta+\gamma)y'(0) = -(\beta+\gamma)c_1$$

Luego se encuentra que $a_3 = \dfrac{y'''(0)}{3!} = -\dfrac{(\beta+\gamma)}{3!} c_1$.

Obtengamos ahora a_4 , para lo cual derivamos implícitamente con respecto a x la ecuación (2.3):

$$2\alpha x\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(1+\alpha x^2\right)\frac{d^4 y}{dx^4} + (2\alpha+\beta)\frac{d^2 y}{dx^2} + (2\alpha+\beta)x\frac{d^3 y}{dx^3} + (\beta+\gamma)\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

o bien, organizando:

$$\left(1+\alpha x^2\right)\frac{d^4 y}{dx^4} + (4\alpha+\beta)x\frac{d^3 y}{dx^3} + (2\alpha+2\beta+\gamma)\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \tag{2.4}$$

Haciendo $x = 0$ y reemplazando los valores de $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)$ en (2.4) se tiene:

$$y^{iv}(0)+(2\alpha+2\beta+\gamma)y''(0)=0 \quad \Rightarrow \quad y'''(0)=-(2\alpha+2\beta+\gamma)y''(0)=\gamma(2\alpha+2\beta+\gamma)c_0$$

Luego se encuentra que

$$a_4=\frac{y^{iv}(0)}{4!}=-\frac{\gamma(2\alpha+2\beta+\gamma)}{4!}c_0 .$$

Continuando el proceso, se obtiene la fórmula siguiente:

$$y^{(n+2)}(0)=-(\alpha n(n-1)+\beta n+\gamma)y^{(n)}(0)\,, \quad n=0,1,2,\ldots \tag{2.5}$$

Llamando

$$P(n)=(\alpha n(n-1)+\beta n+\gamma), \quad n=0,1,2,\ldots$$

Se tiene lo siguiente:

$$a_{n+2}=\frac{y^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}=-\frac{P(n)}{(n+2)!}y^{(n)}(0)=-\frac{P(n)}{(n+2)(n+1)}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}=-\frac{P(n)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

Obtenemos la fórmula recursiva de los coeficientes a_i , $i=0,1,2,\ldots$

$$a_{n+2}=-\frac{P(n)}{(n+2)(n+1)}a_n\,, \quad n=0,1,\ldots \tag{2.6}$$

La fórmula (2.6) coincide con la fórmula dada en [1] .

Así, la solución general de (2.1) es dada por

$$y(x)=c_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\prod_{i=0}^{k-1}P(2i)\right]\frac{x^{2k}}{(2k)!}+c_1\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\prod_{i=0}^{k-1}P(2i+1)\right]\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ejercicio.

Ejemplo 3. Encuentre la serie en series de potencias en x para la solución general de

$$(1+2x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+6x\frac{dy}{dx}+2y=0\,. \tag{3.1}$$

Solución:

La ecuación tiene la forma de (3.1), reconocemos $\alpha=2, \beta=6$ y $\gamma=2$.

Por un lado encontremos el polinomio $P(n)$:

$$P(n)=2n(n-1)+6n+2=2(n+1)^2$$

Utilizando la formula recursiva (2.6) , se tiene

$$a_0 = c_0,$$
$$a_1 = c_1,$$
$$a_{n+2} = -2\frac{(n+1)}{(n+2)}a_n\ , \quad n = 0, 1, \cdots$$

Determinemos los coeficientes de potencias pares de x:

$$a_2 = -2\left(\frac{1}{2}\right)a_0 = -\frac{1}{1}c_0\ ,$$
$$a_4 = -2\left(\frac{3}{4}\right)a_2 = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{1}\right)c_0 = \frac{1.3}{1.2}c_0\ ,$$
$$a_6 = -2\left(\frac{5}{6}\right)a_4 = \left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1.3}{1.2}\right)c_0 = -\frac{1.3.5}{1.2.3}c_0\ ,$$
$$a_8 = -2\left(\frac{7}{8}\right)a_6 = \left(-\frac{7}{4}\right)\left(-\frac{1.3.5}{1.2.3}\right)c_0 = \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}c_0$$

Observando la ley de formación de los coeficientes, se tiene en general,

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{\prod_{i=1}^{k}(2i-1)}{k!}c_0\ , \quad k = 0, 1, \cdots. \tag{3.2}$$

Ahora determinemos los coeficientes de las potencias impares de x:

$$a_3 = -2\left(\frac{2}{3}\right)a_1 = -4\left(\frac{1}{3}\right)c_1\ ,$$
$$a_5 = -2\left(\frac{4}{5}\right)a_3 = -4\left(\frac{2}{5}\right)\left(-4\left(\frac{1}{3}\right)\right)c_1 = 4^2\frac{1.2}{3.5}c_1\ ,$$
$$a_7 = -2\left(\frac{6}{7}\right)a_5 = -4\left(\frac{3}{7}\right)\left(4^2\frac{1.2}{3.5}c_1\right)c_1 = -4^3\frac{1.2.3}{3.5.7}c_1\ ,$$
$$a_9 = -2\left(\frac{8}{9}\right)a_7 = -4\left(\frac{4}{9}\right)\left(-4^3\frac{1.2.3}{3.5.7}\right)c_1 = 4^4\frac{1.2.3.4}{3.5.7.9}c_1\ .$$

En general,

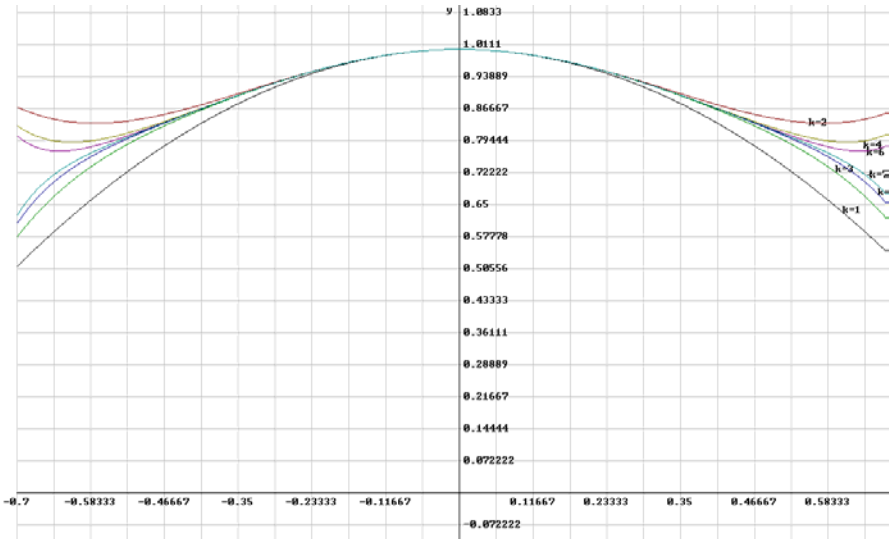
$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{4^k\,k!}{\prod_{i=1}^{k}(2i+1)}c_1\ , \quad k = 0, 1, \cdots. \tag{3.3}$$

A partir de (8) y (9) vemos que

$$y(x)=c_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\prod_{i=1}^{k}(2i-1)}{k!}x^{2k}+c_1\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{4^k\,k!}{\prod_{i=1}^{k}(2i+1)}x^{2k+1}$$

es la solución usando polinomios de Taylor (observar que es lo mismo de la serie de potencias) en x para la solución general de (3.1).

Ya $P_0(x)=1+2x^2$ no se anula en los reales, luego la solución está definida en todo R. Sin embargo, $P_0(x)=1+2x^2=0$ en $x=\pm i/\sqrt{2}$ esto implica que las soluciones dada por el método de Taylor converge en el intervalo $\left(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},\right)$. Esto ocurre, ya que $\rho=1/\sqrt{2}$ es la distancia del punto $x_0=0$ a $x=\pm i/\sqrt{2}$ en el plano complejo).



El siguiente ejemplo muestra que, en muchos casos hay que conformarnos con encontrar un número finito de términos, ya que no se tiene una formula cerrada para los coeficientes de las soluciones en series de potencia.

Ejemplo 4. Resolver el problema de valor inicial mediante series de potencias

$$\left(1+2x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+10x\frac{dy}{dx}+8y=0\,,\quad y(0)=2,\ y'(0)=-3$$

Solución:

La ecuación tiene la forma de (1), reconocemos $\alpha=2,\beta=10$ y $\gamma=8$ y las condiciones iniciales: $a_0=y(0)=2$, $a_1=y'(0)=-3$

Por un lado encontremos el polinomio $P(n)$:

$$P(n) = 2n(n-1) + 10n + 8 = 2(n+2)^2$$

En vez de utilizar la formula recursiva (6), para obtener los coeficientes a_i , $i = 2,3,4,\ldots$, podemos utilizar la formula (5):

$$y^{(n+2)}(0) = -2(n+2)^2\, y^{(n)}(0)\,, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Encontremos los primeros términos.

Para $n = 0$:

$$y''(0) = -8y(0) = -8(2) = -16 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = -8$$

Para $n = 1$:

$$y'''(0) = -18y'(0) = -18(-3) = 54 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = 9$$

Para $n = 2$:

$$y^{iv}(0) = -y''(0) = -32(-16) = 512 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{y^4(0)}{4!} = \frac{64}{3}$$

Para $n = 3$:

$$y^{v}(0) = -y'''(0) = -50(54) = -2700 \quad \Rightarrow \quad a_5 = \frac{y^{v}(0)}{5!} = -\frac{45}{2}$$

Luego la solución del P.V.I viene dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \\ &= 2 - 3x - 8x^2 + 9x^3 + \frac{64}{3}x^4 - \frac{45}{2}x^5 - \frac{256}{5}x^6 + \frac{105}{2}x^7 + \cdots. \end{aligned}$$

Más generalmente, sea $x_0 \neq 0$ un punto ordinario. Por lo tanto la solución por los polinomios de Taylor será de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

donde

$$a_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Es la solución de

$$\left(1+\alpha(x-x_0)^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\beta(x-x_0)\frac{dy}{dx}+\gamma\, y=0. \qquad (*)$$

Se puede demostrar

$$y^{(n+2)}(x_0) = -(\alpha n(n-1)+\beta n+\gamma)\, y^{(n)}(x_0), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Ejemplo 5. Determinar mediante los polinomios de Taylor la solución general de la ecuación diferencial

$$\left(2+4x-2x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-12(x-1)\frac{dy}{dx}-12y=0. \qquad (5.1)$$

Solución

Lo primero que hay que hacer, es escribir el polinomio $P_0(x)=2+4x-2x^2$

En potencias de $(x-1)$.

Ahora $P_0(x)=2+4x-2x^2 = 4-2(x-1)^2$

Así, la ecuación (5.1) queda:

$$\left(4-2(x-1)^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-12(x-1)\frac{dy}{dx}-12y=0$$

o bien, en la forma (*):

$$\left(1-\frac{1}{2}(x-1)^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-3(x-1)\frac{dy}{dx}-3y=0$$

Reconocemos $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\beta=-3$ y $\gamma=-3$.

Se tiene entonces el polinomio $P(n)$:

$$P(n) = -\frac{1}{2}n(n-1)-3n-3 = -\frac{(n+2)(n+3)}{2}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

En vez de utilizar la formula recursiva (6), para obtener los coeficientes a_i , $i = 2,3,4,\dots$, podemos utilizar la formula (5):

$$y^{(n+2)}(1) = \frac{(n+2)(n+3)}{2} y^{(n)}(1) , \quad n = 0,1,2,\dots$$

Encontremos los primeros términos.

Para $n = 0$:

$$y''(1) = 3y(1) = 3c_0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{y''(1)}{2!} = \frac{3}{2}c_0$$

Para $n = 1$:

$$y'''(1) = 6y'(1) = 6c_1 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{y'''(1)}{3!} = c_1$$

Para $n = 2$:

$$y^{iv}(1) = 10y''(1) = 30c_0 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{y^4(1)}{4!} = \frac{5}{4}c_0$$

Para $n = 3$:

$$y^{v}(1) = 15y'''(1) = -90c_1 \quad \Rightarrow \quad a_5 = \frac{y^v(1)}{5!} = \frac{3}{4}c_1$$

Luego la solución del P.V.I viene dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\ &= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_4(x-1)^4 + \cdots \\ &= c_0\left(1 + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{5}{4}(x-1)^4 + \cdots + \frac{2k+1}{2^k}(x-1)^{2k} + \cdots\right) + \\ &\qquad c_1\left((x-1) + (x-1)^3 + \frac{3}{4}(x-1)^5 \cdots + \frac{2k+1}{2^k}(x-1)^{2k+1} + \cdots\right) \end{aligned}$$

.

O en forma más compacta:

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2^k}(x-1)^{2k} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2^k}(x-1)^{2k+1}$$

.

Deberá observarse que hemos hallado dos series en una forma puramente for-mal, las cuales son convergentes para todo x finito. Para ver que ambas son linealmente independientes definimos lo siguiente:

$$y_1(1)=1, \quad y_2(1)=0$$
$$y_1'(1)=0, \quad y_2'(1)=1,$$

y por lo tanto

$$W(y_1, y_2)(1)\neq 0.$$

Donde $W(y_1, y_2)$ denota el Wronskiano de las soluciones y_1 y y_2, en las cuales

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2k+1}{2^k}(x-1)^{2k}\ , \quad y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2k+1}{2^k}(x-1)^{2k+1}.$$

.

Ejemplo 6. Resolver el problema de valor inicial

$$xy''+y'+xy=0\ , \quad y(1)=0, \quad y'(1)=-1 \qquad (6.1)$$

Solución.

Método series de potencias:

Mediante el cambio de variable $u=x-1$, llevamos el problema al origen.

En efecto,

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx},$$
$$\frac{d^2y}{du^2}=\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad (6.2)$$

La ecuación (6.1) toma la forma

$$(u+1)\frac{d^2y}{du^2}+\frac{dy}{du}+(u+1)y=0\ , \quad y(0)=0, \quad y'(0)=-1$$

Por lo tanto suponemos que la solución la buscamos de la forma:

$$y(u)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k u^k$$

Que al reemplazar en la ecuación diferencial, se obtiene

$$(u+1)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k u^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k u^{k-1} + (u+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k = 0 \,,$$

Realizando las multiplicaciones

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k u^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k u^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k u^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k = 0 \,,$$

Escribiendo todo en potencias de u^k , obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)a_{k+1} u^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} u^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} u^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} u^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k = 0 \,,$$

Empezando todas las sumatorias desde $k=1$, y organizando, se tiene

$$2a_2 + a_1 + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[k(k+1)a_{k+1} + (k+2)(k+1)a_{k+2} + (k+1)a_{k+1} + a_{k-1} + a_k \right] u^k = 0 \,,$$

mejor,

$$2a_2 + a_1 + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k+1)^2 a_{k+1} + a_{k-1} + a_k \right] u^k = 0 \,,$$

Así pues,

$$\begin{aligned} &2a_2 + a_1 + a_0 = 0, \\ &(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k+1)^2 a_{k+1} + a_{k-1} + a_k = 0 \,, \quad k \geq 1. \end{aligned} \qquad (6.3)$$

Usando las condiciones iniciales $y(0)=0, \quad y'(0)=-1$. Con lo que $a_0 = 0, \quad a_1 = -1$. Reemplazando en (6.3), se tiene los primeros coeficientes:

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{6}\,, \quad a_4 = \frac{1}{6},$$

De donde

$$y(u) = -u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{6} + \cdots$$

Y haciendo $u = x-1$, se tiene finalmente

$$y(x) = -(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{6} + \cdots$$

Donde la convergencia se tiene en el intervalo $(0,2)$ ¿por qué?

Método series de Taylor:

Buscamos soluciones de la forma

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n .$$

Para ello derivamos sucesivamente y evaluamos en las derivadas encontradas, esto es,

$$xy''+y'+xy=0\,,\quad a_0=y(1)=0,\quad a_1=y'(1)=-1,\quad a_2=\frac{y''(1)}{2!}=\frac{1}{2}$$

$$xy'''+2y''+xy'+y=0 \quad\Rightarrow\quad a_3=\frac{y'''(1)}{3!}=-\frac{1}{3!}$$

$$xy^{iv}+3y'''+xy''+2y'=0 \quad\Rightarrow\quad a_4=\frac{y^{iv}(1)}{4!}=\frac{4}{4!}$$

$$xy^{v}+4y^{iv}+xy'''+3y''=0 \quad\Rightarrow\quad a_5=\frac{y^{v}(1)}{5!}=-\frac{18}{5!}$$

Siguiendo el proceso, se obtiene la formula recursiva:

$$xy^{(n)}+(n-1)y^{(n-1)}+xy^{(n-2)}+(n-3)y^{(n-3)}=0\,,\qquad n\geq 3.$$

De donde se sigue que la solución en series de Taylor es dada por

$$y(x)=-(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{6}+\cdots$$

La misma solución dada por el método de los coeficientes indeterminados, pero encontrada de una forma más sencilla como puede verse.

En el ejemplo siguiente, encontraremos por el método de Taylor , la solución de una de las ecuaciones diferenciales importantes que aparecen en la física.

Ejemplo 7. (La ecuación de Legendre) Encuentre la solución en series Taylor alrededor de x=0 para la solución general de

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\alpha(\alpha+1)y=0 \tag{7.1}$$

Solución:

Buscamos la solución general de la forma

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{7.2}$$

donde

$$a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!},\quad n=0,1,\ldots \quad \text{y} \quad a_0=y(0)=c_0\ ,\quad a_1=y'(0)=c_1 .$$

Para encontrar el coeficiente a_2 , hacemos $x=0$ en (7.1) y reemplazamos los valores de $a_0=c_0$, $a_1=c_1$:

esto es,

$$y''(0)+\alpha(\alpha+1)y(0)=0 \quad\Rightarrow\quad y''(0)=-\alpha(\alpha+1)\,y(0)=-\alpha(\alpha+1)c_0$$

luego se tiene que $a_2=\dfrac{y''(0)}{2!}=-\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2!}c_0$.

Ahora para obtener los coeficientes a_i , $i=3,4,\ldots$, deberemos derivar implícitamente con respecto a x la ecuación (7.1) n veces, y sustituir los valores encontrados de los a_i anteriores.

Al derivar la ecuación (7.1) implícitamente con respecto a x, se obtiene:

$$(1-x^2)\frac{d^3y}{dx^3}-4x\frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha(\alpha+1)-2)\frac{dy}{dx}=0 \tag{7.3}$$

Haciendo $x=0$ y reemplazando los valores de $y(0), y'(0), y''(0)$ en (7.3) se tiene:

$$y'''(0)=-(\alpha(\alpha+1)-2)\,y'(0)=-(\alpha(\alpha+1)-2)c_1=-(\alpha+2)(\alpha-1)c_1$$

Luego se encuentra que $a_3=\dfrac{y'''(0)}{3!}=-\dfrac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{3.2}c_1$.

Obtengamos ahora a_4 , para lo cual derivamos implícitamente con respecto a x la ecuación (7.3) , se tiene:

$$(1-x^2)\frac{d^4y}{dx^4}-6x\frac{d^3y}{dx^3}+(\alpha(\alpha+1)-6)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{7.4}$$

Haciendo $x=0$ y reemplazando los valores de $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)$ en (7.4) se tiene:

$$y^{iv}(0)=-(\alpha(\alpha+1)-6)y''(0)=-(\alpha+3)(\alpha-2)[-\alpha(\alpha+1)]c_0=(\alpha+3)(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)c_0$$

Luego se encuentra que

$$a_4 = \frac{y^{iv}(0)}{4!} = \frac{(\alpha+3)(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)}{4!}c_0.$$

Derivando la ecuación (7.4) se tiene

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^5y}{dx^5} - 8x\frac{d^4y}{dx^4} + \left(\alpha(\alpha+1)-12\right)\frac{d^3y}{dx^3} = 0 \qquad (7.5)$$

Haciendo $x=0$ y reemplazando los valores de $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)$ en (7.4) se tiene:

$$y^{v}(0) = -(\alpha(\alpha+1)-12)y'''(0) =$$
$$-(\alpha+4)(\alpha-3)[-(\alpha+2)(\alpha-1)c_1] = (\alpha+4)(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)c_1$$

Encontrando que

$$a_5 = \frac{y^{v}(0)}{4!} = \frac{(\alpha+4)(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)}{5!}c_1.$$

Continuando el proceso, se obtiene la fórmula siguiente para k=1,2,…

$$a_{2k} = (-1)^k\frac{(\alpha+2k-1)(\alpha+2k-3)\cdots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2k+2)}{(2k)!}c_0,$$
$$a_{2k+1} = (-1)^k\frac{(\alpha+2k)(\alpha+2k-2)\cdots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2k+1)}{(2k+1)!}c_1.$$

Todos los coeficientes están determinados en términos de ahora c_0, y c_1, por lo cual debemos tener

$$y(x) = c_0y_1(x) + c_1y_2(x),$$

donde

$$y_1(x) = 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{(\alpha+3)(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)}{4!}x^4 - \cdots$$

O bien,

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(\alpha+2k-1)(\alpha+2k-3)\cdots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2k+2)}{(2k)!}x^{2k},$$

y

$$y_2(x) = x - \frac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha+4)(\alpha+4)(\alpha-1)(\alpha-3)}{5!}x^5 - \cdots$$

O bien,

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha+2k)(\alpha+2k-2)\cdots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2k+1)}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

Ambas $y_1(x)$, y $y_2(x)$, son soluciones de la ecuación de Legendre, al tomar respectivamente

$$\begin{array}{ll} c_0(0)=1, & c_1(0)=0 \\ c_0(0)=0, & c_1(0)=1, \end{array}$$

Ellas forman una base para las soluciones, ya que

$$\left.\begin{array}{ll} y_1(0)=1, & y_2(0)=0 \\ y_1'(0)=0, & y_2'(0)=1, \end{array}\right. \Rightarrow W(y_1, y_2)(1) \neq 0$$

Donde $W(y_1, y_2)$ denota el Wronskiano de las soluciones y_1 y y_2.

Observar que si α es un entero par no negativo

$$n = 2k, \quad (k = 0,1,2,\cdots),$$

luego continuar…………………

Ejemplo 8. Resuelva la ecuación diferencial

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{8.1}$$

Solución.

Por el método de Taylor.

Supongamos que las soluciones son de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $a_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$.

Para esto, pongamos $c_0 = y(0) = y^{(0)}(0)$ y $c_1 = y'(0)$.

Haciendo $x = 0$ y reemplazando los valores anteriores en la ecuación (8.1), se tiene que $c_1 = 0$.

Derivando implícitamente con respecto a x la ecuación (8.1), tenemos

$$xy''' + y'' + y'' + xy' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy''' + 2y'' + xy' + y = 0 \qquad (8.2)$$

Haciendo $x = 0$ y reemplazando los valores anteriores en la ecuación (8.2), se tiene que

$$y''(0) = -\frac{1}{2}y(0) = -\frac{1}{2}c_0$$

Derivando la última ecuación (8.2), tenemos

$$xy^{iv} + y''' + 2y''' + xy'' + y' + y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy^{iv} + 3y''' + xy'' + 2y' = 0 \qquad (8.3)$$

Haciendo $x = 0$ y reemplazando los valores anteriores en la ecuación (8.3), se tiene que

$$y'''(0) = -\frac{2}{3}y'(0) = -\frac{2}{3}c_1 = 0$$

Repitiendo el proceso anterior, se llega a la siguiente formula de recurrencia:

$$xy^{(n)} + (n-1)y^{(n-1)} + xy^{(n-2)} + (n-2)y^{(n-3)} = 0, \quad n \geq 3$$

Que al hacer $x = 0$, y reemplazar los valores obtenidos, se obtiene

$$y^{(n-1)}(0) = -\frac{(n-2)}{(n-1)}y^{(n-3)}(0), \quad n \geq 3 \qquad (8.4)$$

Encontremos varios valores

$$\begin{aligned}
n = 3: &\quad y''(0) = -\frac{1}{2}y^{(0)}(0) = -\frac{1}{2}c_0 \ , \\
n = 4: &\quad y'''(0) = -\frac{2}{3}y'(0) = -\frac{1}{2}c_1 = 0, \\
n = 5: &\quad y^{iv}(0) = -\frac{3}{4}y''(0) = -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}c_0\right) = \frac{3}{4.2}c_0 \ , \\
n = 6: &\quad y^{v}(0) = -\frac{4}{5}y'''(0) = -\frac{4}{5}(0) = 0 \ , \\
n = 7: &\quad y^{vi}(0) = -\frac{5}{6}y^{iv}(0) = -\frac{5}{6}\left(\frac{3}{4.2}c_0\right) = -\frac{5}{4.2^2}c_0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Obtengamos ahora los coeficientes a_n , note que la fórmula de recurrencia (8.4) junto con $c_1 = 0$ implica que todos los coeficientes con subíndices impares desaparecen, y

$$a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{1}{2!}y^{(0)}(0) = \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)c_0 = -\frac{1}{2^2}c_0$$

$$a_4 = \frac{y^{iv}(0)}{4!} = \frac{1}{4!}\left(\frac{3}{4.2}c_0\right) = \frac{1}{4^2.2^2}c_0,$$

$$a_6 = \frac{y^{vi}(0)}{6!} = \frac{1}{6!}\left(-\frac{5}{4.2^2}c_0\right) = -\frac{1}{6.^2 4^2.2^2}c_0,$$

$$\vdots$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)^2(2n-2)^2.(2n-4)^2\cdots 6.^2 4^2.2^2}c_0,$$

Entonces

$$y(x) = c_0 - \frac{c_0}{2^2}x^2 + \frac{c_0}{2^2 4^2}x^4 - \frac{c_0}{2^2 4^2 6^2}x^6 + \frac{c_0}{2^2 4^2 6^2 8^2}x^8 + \cdots$$

$$= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n . \qquad (8.5)$$

La serie (8.5) se usa frecuentemente en matemáticas aplicadas y recibe el

nombre de **función de Bessel de orden** $J_0(x)$.

Deberá observarse que el método de Taylor ha producido sólo una de las soluciones de la ecuación (8.1). Para hallar la otra solución linealmente independiente, usamos la formula $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{dx}{x[y_1(x)]^2}$

Entonces la otra solución será:

$$y_2(x) = J_0(x)\int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}$$

La solución general viene dada por

$$y(x) = AJ_0(x) + BJ_0(x)\int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2} .$$

En nuestro próximo ejemplo encontraremos una situación en la cual el método de Taylor no da ninguna solución (como es el caso cuando se usa series de potencias).

Ejemplo 9. Considere la ecuación de Euler

$$x^2 y'' + xy' + y = 0. \qquad (9.1)$$

Solución.

Ya que este problema no contiene condiciones iniciales, pongamos $y(0) = c_0$, y $y'(0) = c_1$. Con lo cual al reemplazar el valor de $x = 0$, $y(0) = c_0$ y $y'(0) = c_1$ en la ecuación diferencial, tenemos

$$(0)^2 y''(0) + (0)y'(0) + y(0) = 0. \quad \Rightarrow c_0 = 0.$$

Al derivar implícitamente con respecto a x en la ecuación diferencial (9.1), se tiene

$$2xy'' + x^2 y''' + xy'' + y' + y' = 0 \Leftrightarrow 3xy'' + x^2 y''' + 2y' = 0$$

Reemplazando los valores de $x = 0$, $y'(0) = c_1$ en la última ecuación diferencial, tenemos

$$3(0)y''(0) + (0)^2 y'''(0) + 2y'(0) = 0 \quad \Rightarrow c_1 = 0.$$

Como todas las derivadas evaluadas en $x = 0$, estarán en términos de c_0, y de c_1, entonces todos los a_n desaparecerán, y por lo tanto arrojará la solución $y(x) = 0$. Así en este caso el método de Taylor falla para encontrar la solución de la ecuación diferencial de Euler, la cual es

$$y(x) = A\cos(\ln|x|) + BA\sin(\ln|x|).$$

En el próximo ejemplo, aplicaremos el método del desarrollo de Taylor para encontrar la solución de una ecuación diferencial, en donde los coeficientes de la ecuación (1) ya no son polinomios.

Ejemplo 10. Resolver el problema de valor inicial

$$y'' - e^x y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \qquad (10.1)$$

Solución.

Nótese que en la ecuación diferencial todos los puntos son ordinarios. Buscamos una solución de la forma: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ donde $a_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$, $n \geq 0$.

Para esto, despejamos $y''(x)$ en la ecuación, reemplazando los valores $a_0 = y(0) = 1$, $a_1 = y'(0) = 1$ para obtener así a_2:

$$y''(x) = e^x y(x) \tag{10.2}$$

$$\Rightarrow y''(0) = e^0 y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{1}{2}$$

Derivamos (10.2) y reemplazamos los valores encontrados de los a´íes.

$$y'''(x) = e^x y(x) + e^x y'(x) = e^x \left(y(x) + y'(x)\right) \tag{10.3}$$

$$\Rightarrow y'''(0) = e^0 \left(y(0) + y'(0)\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$$

Derivamos nuevamente (10.3) y reemplazamos

$$y^{iv}(x) = e^x \left(y(x) + y'(x)\right) + e^x \left(y'(x) + y''(x)\right) = e^x \left(y(x) + 2y'(x) + y''(x)\right) \tag{10.4}$$

$$\Rightarrow y^{iv}(0) = e^0 \left(y(0) + 2\, y'(0) + y''(0)\right) = 4 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{y'''(0)}{4!} = \frac{4}{4!} = \frac{1}{3.2}$$

Siguiendo el proceso, encontramos la siguiente fórmula para $y^{(n+2)}(x)$ por lo tanto para a_{n+2} :

$$y^{(n+2)}(x) = e^x \left(y(x) + \binom{n}{0} y'(x) + \binom{n}{1} y''(x) + \cdots + \binom{n}{n-1} y^{(n-1)}(x) + y^{(n)}(x) \right)$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{(k)}(x)$$

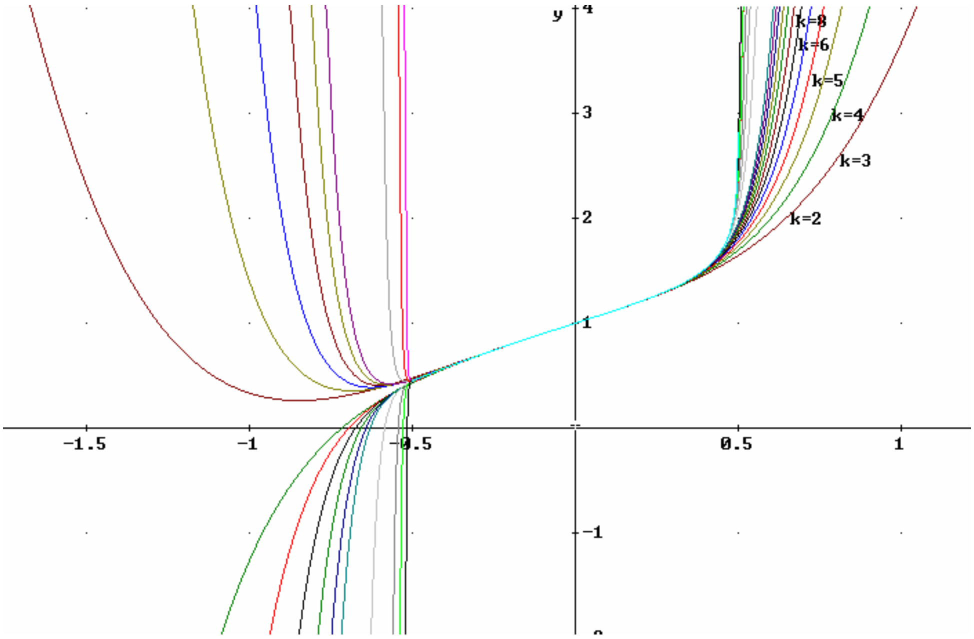
$$\Rightarrow y^{(n+2)}(0) = e^0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{(k)}(0) = \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{y^{(n+2)}(0)}{(n+2)!} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{(k)}(0)}{(n+2)!}, \ n \geq 0.$$

luego la solución general viene dada por

$$y(x) = 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}$$

$$= 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+2)!} x^{n+2} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{45}x^6 + \frac{2}{315}x^7 + \cdots.$$

La serie converge para todo $x \in R$.



Realicemos este mismo ejemplo, pero ahora usando solución en series de potencias. Para esto necesitamos del siguiente teorema.

Teorema. Sean

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \qquad (A)$$

convergentes en el intervalo $|x| < R$, $R > 0$. Entonces la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

con

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \ ,$$

conocida como el producto de Cauchy de las series de (A), converge también para $|x| < R$, y

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

para todo x en este intervalo.

Cuando se expresa en términos de funciones analíticas este teorema afirma que el producto de dos funciones analíticas en el intervalo I , f y g, es también él mismo una función analítica en I, y que su expansión en series de potencias alrededor de cualquier punto x_0 en I es el producto de Cauchy de las expansiones en serie de potencias de f y g alrededor de x_0.

Ahora ya podemos seguir con el ejemplo anterior.

Suponemos la solución de la forma

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

Al reemplazar en la ecuación diferencial nos da

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_k x^{k-2}-e^x\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=0,$$

o bien,

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_k x^{k-2}-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\right)=0, \qquad (10.5)$$

Ahora aplicamos el teorema anterior, para escribir el producto de las dos series en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\right)&=\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\\&=a_0+\left(a_0+a_1\right)x+\left(\frac{a_0}{2!}+a_1+a_2\right)x^2+\left(\frac{a_0}{3!}+\frac{a_1}{2!}+a_2+a_3\right)x^3+\cdots\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{a_j}{(k-j)!}\right)x^k\ .\end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en (10.5), obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2}-\sum_{j=0}^{k}\frac{a_j}{(k-j)!}\right]x^k=0,$$

De esto último se sigue que

$$a_{k+2}=\frac{1}{(k+2)(k+1)}\sum_{j=0}^{k}\frac{a_j}{(k-j)!}\quad,\quad k\geq 0.$$

En particular,

$$a_2 = \frac{a_0}{2},$$
$$a_3 = \frac{a_0 + a_1}{6},$$
$$a_4 = \frac{1}{12}\left(\frac{a_0}{2} + a_1 + a_2\right) = \frac{a_0 + a_1}{12},$$

etc., y en principio todos los a_k pueden calcularse en términos de a_0 y a_1.
Reemplazando los valores de $a_0 = 1, a_1 = 1$ se tiene.

$$a_2 = \frac{1}{2},$$
$$a_3 = \frac{1}{3},$$
$$a_4 = \frac{1}{6},$$
$$\vdots$$

Luego la solución del problema de valor inicial viene dado por

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots.$$

Deberá notarse que la solución obtenida por series de potencias es más pobre que la obtenida por Taylor.

Ejercicio . Encuentre una series de potencias para la solución general de la ecuación diferencial

$$y''(x) + \sin(x)y' + e^x y = 0$$

Los próximos ejemplos tratan con ecuaciones diferenciales no lineales.

Ejemplo 11. Encuentre la solución en series de potencias y en series de Taylor del problema de valor inicial

$$y' = 1 + y^2 \ ; \quad y(0) = 0. \tag{11.1}$$

Solución.

La ecuación diferencial (11.1) no es lineal, sin embargo, se conoce su solución mediante el uso de separación de variables, a saber, $y(x) = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Método series de potencias:

Suponemos que la ec. (11.1) tiene como solución

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (11.2)$$

Derivando, se tiene

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \qquad (11.3)$$

evaluando la ec. (11.1) en $x=0$ e imponiendo la condición inicial, se encuentra que $y(0)=0=a_0$. Reemplazando (11.2) , (11.3) en (11.1) vemos que los coeficientes de la serie a_n , deben satisfacer

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1+\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = 1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right). \qquad (11.4)$$

Igualando los coeficientes, obtenemos

$$\begin{aligned}
&n=0: \quad a_1 = 1+a_0^{\,2} = 1\\
&n=1: \quad 2a_2 = 2a_0 a_1 = 0, \Rightarrow a_2 = 0\\
&n=2: \quad 3a_3 = 2a_0 a_2 + a_1^{\,2} = 1, \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}\\
&n=3: \quad 4a_4 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 = 0, \Rightarrow a_4 = 0\\
&n=4: \quad 5a_5 = 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^{\,2} = \frac{2}{3}, \Rightarrow a_5 = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

En general,

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \text{n es par} \\ 1+a_0^{\,2}, & \text{si} \quad n=1 \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}, & \text{si} \quad \text{n es impar}, n>1. \end{cases}$$

Así, estamos en capacidad de calcular en forma recurrente los coeficientes de la serie pero no somos capaces de expresar fácilmente explícitamente en a_n como función de n. Por tanto, no podemos calcular el radio de convergencia directamente. Sin embargo sabemos, que el radio de convergencia es $\pi/2$.

Luego la solución del problema de valor inicial viene dado por

$$y(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots. \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Método series de Taylor:

Supongamos que las soluciones son de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$.

Se tiene inicialmente que $a_0 = y(0) = 0$.

Haciendo $x = 0$ y reemplazando el valor de $y(0) = 0$ en la ecuación (11.1), se tiene que

$$y'(0) = 1 + y(0)^2 = 1, \quad \Rightarrow a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = 1$$

Derivando implícitamente con respecto a x la ecuación (11.1), tenemos

$$y'' = 2yy' \qquad (11.5)$$

Haciendo $x = 0$ y reemplazando los valores anteriores $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ en la ecuación (11.5), tenemos que

$$y''(0) = 2y(0)y'(0) = 0, \ \Rightarrow a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = 0.$$

Repitiendo el proceso una vez

$$y''' = 2yy'' + 2(y')^2$$
$$y'''(0) = 2y(0)y''(0) + 2(y'(0))^2 = 2(0)(1) + 2(1)^2 = 2, \quad \Rightarrow a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{1}{3}$$

Otra vez,

$$y^{iv} = 2yy''' + 2y'y'' + 4(y')(y'') = 2yy''' + 6y'y''$$
$$y^{iv}(0) = 2y(0)y'''(0) + 6y'(0)y''(0) = 2(0)(2) + 6(1)(0) = 0, \quad \Rightarrow a_4 = \frac{y^{iv}(0)}{4!} = 0$$

Y otra vez…..

$$y^{v} = 2yy^{iv} + 2y'y''' + 6y'y''' + 6y''y'' = 2yy^{iv} + 8y'y''' + 6(y'')^2$$
$$y^{v}(0) = 2y(0)y^{iv}(0) + 8y'(0)y'''(0) + 6(y''(0))^2$$
$$= 2(0)(0) + 8(1)\left(\frac{1}{3}\right) + 6(0)^2 = \frac{8}{3}, \quad \Rightarrow a_5 = \frac{y^{v}(0)}{5!} = \frac{2}{15}$$

Hagamóslo una vez más

$$y^{vi} = 2yy^{v} + 2y'y^{iv} + 8y'y^{iv} + 8y''y''' + 12(y'')y''' = 2yy^{v} + 10y'y^{iv} + 20y''y'''$$

$$y^{vi}(0) = 2y(0)y^{v}(0) + 10y'(0)y^{iv}(0) + 20y''(0)y'''(0) = 0 \quad \Rightarrow a_6 = \frac{y^{vi}(0)}{6!} = 0$$

Por última vez

$$\begin{aligned} y^{vii} &= 2yy^{vi} + 2y'y^{v} + 10y'y^{v} + 10y''y^{iv} + 20y''y^{iv} + 20y'''y''' \\ &= 2yy^{vi} + 12y'y^{v} + 30y''y^{iv} + 20(y''')^2 \\ y^{vii}(0) &= 2y(0)y^{vi}(0) + 12y'(0)y^{v}(0) + 30y''(0)y^{iv}(0) + 20(y'''(0))^2 \\ &= 12(1)\left(\frac{8}{3}\right) + 20(2)^2 \\ &= 112 \quad \Rightarrow a_6 = \frac{112}{7!} = \frac{2}{21}. \end{aligned}$$

Luego la solución del problema de valor inicial viene dado por

$$y(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{2}{21}x^7 + \frac{23}{810}x^9 + \cdots. \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

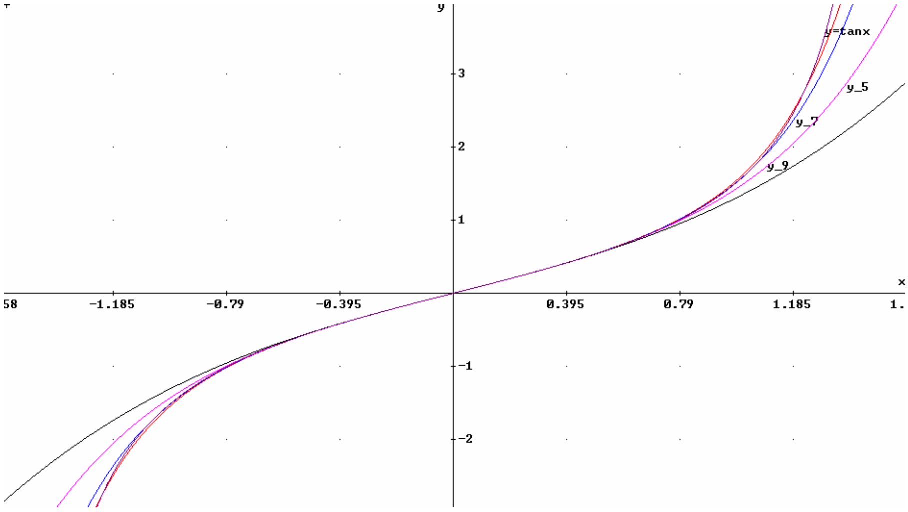
Esto es,

$$\tan x \approx x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{2}{21}x^7 + \frac{23}{810}x^9 + \cdots. \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Nótese que estamos en capacidad de calcular en forma recurrente los coeficientes de la serie pero no somos capaces de expresar fácilmente a_n explícitamente como función de n. De nuevo no podemos encontrar su radio de convergencia.

Pero si podemos calcular recurrentemente tantos coeficientes de la serie como sea necesario para producir una solución con una exactitud deseada.

Esto es lo que pasa cuando se trata de encontrar solución en series de problemas no lineales.



Ejemplo 11. Encuentre la solución en series de potencias y en series de Taylor del problema de valor inicial

$$y' = x + e^{-y} \;; \quad y(0) = 0. \tag{12.1}$$

Solución.

En este problema podemos encontrar su solución en forma analítica como sigue:

Haciendo $u = e^{-y}$, se tiene que

$$\frac{du}{dx} = -e^{-y}\frac{dy}{dx} \tag{12.2}$$

Así que multiplicamos la ec. (12.1) por $-e^{-y}$, para obtener

$$-e^{-y}\frac{dy}{dx} = -xe^{-y} - e^{-2y}$$

O bien, el siguiente problema de valor inicial equivalente

$$\frac{du}{dx} + xu = -u^2 \;, \tag{12.3}$$

La ecuación diferencial (12.3) es de tipo Bernoulli, por lo tanto haremos la sustitución

$$w = u^{-1} \;, \tag{12.4}$$

Con lo cual se tiene

$$\frac{dw}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx}$$

Multiplicando a ambos miembros de la ecuación (12.3) por $-u^{-2}$, se obtiene

$$-u^{2}\frac{du}{dx}-xu^{-1}=-1\,,$$

O bien, ya que $w=u^{-1}$, $w(0)=[u(0)]^{-1}=1$

$$\frac{dw}{dx}-xw=-1\,,\quad w(0)=1 \qquad (12.5)$$

La ecuación (12.5) resulta ser lineal, se encuentra que el factor integrante viene a ser $\mu(x)=\exp\left[-\int_0^x tdt\right]=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Multiplicando la ecuación (12.5) por el factor integrante, se tiene

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}w\right]=-e^{-\frac{x^2}{2}}\,,$$

Luego la solución de (12.5) es obtenida como

$$w(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\left[C+\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right], \qquad (12.6)$$

Reemplazando la condición inicial para encontrar C, obtenemos

$$1=w(0)=e^{\frac{(0)^2}{2}}\left[C+\int_0^0 e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right],\quad \Rightarrow \quad C=1$$

Así que al devolvernos, tenemos:

$$\frac{1}{u(x)}=e^{\frac{x^2}{2}}\left[1+\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right],\quad \Rightarrow u(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{1+\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt}$$

Pero $u=e^{-y}$.

$$e^{-y}=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{1+\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt}\quad \Rightarrow -y=\ln\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{1+\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt}\right]\quad \Rightarrow -y=\ln e^{-\frac{x^2}{2}}-\ln\left[1+\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]$$

O finalmente,

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+\ln\left[1+\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]=\frac{x^2}{2}+\ln\left[1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right],\quad x>-1.2755$$

donde la **función de error** erf(x) viene dada por:

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Ahora encontremos su solución por el método de las series de Taylor:

Supongamos que las soluciones son de la forma $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ con $a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$.

Se tiene inicialmente que $a_0=y(0)=0$.

Haciendo $x=0$ y reemplazando el valor de $y(0)=0$ en la ecuación (12.1), se tiene que

$$y'(0)=0+e^{-(0)}=1,\quad \Rightarrow a_1=\frac{y'(0)}{1!}=1$$

Derivando implícitamente con respecto a x la ecuación (12.1), tenemos

$$y''=1-e^{-y}y' \tag{12.7}$$

Haciendo $x=0$ y reemplazando los valores anteriores $y(0)=0,\ y'(0)=1$ en la ecuación (12.7), tenemos que

$$y''(0)=1-e^{-(0)}y'(0)=0,\ \Rightarrow a_2=\frac{y''(0)}{2!}=0.$$

Derivando nuevamente la ecuación (12.7) con respecto a x, se tiene

$$y'''=e^{-y}y'-e^{-y}y''=-e^{-y}\left(y''-y'\right), \tag{12.8}$$

Haciendo $x=0$ y reemplazando los valores anteriores $y(0)=0,\ y'(0)=1$ y $y''(0)=0$ en la ecuación (12.8), tenemos que

$$y'''(0)=-e^{-(0)}\left(y''(0)-y'(0)\right)=1,\Rightarrow a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=\frac{1}{3!}$$

Repitiendo el proceso anterior

$$y^{iv}=-e^{-y}\left(y'''-2y''+y'\right),$$

$$y^{iv}(0)=-e^{-(0)}\left(y'''(0)-2y''(0)+y'(0)\right)=-2,\quad\Rightarrow\quad a_4=\frac{y^{iv}(0)}{4!}=-\frac{2}{4!}$$

Repetiremos el proceso unas cuantas veces

$$y^{v} = -e^{-y}\left(y^{iv} - 3y''' + 3y'' - y'\right),$$

$$y^{v}(0) = -e^{-(0)}\left(y^{iv}(0) - 3y'''(0) + 3y''(0) - y'(0)\right) = 6, \quad \Rightarrow a_5 = \frac{y^{v}(0)}{5!} = \frac{6}{5!}$$

$$y^{vi} = -e^{-y}\left(y^{v} - 4y^{iv} + 6y''' - 4y'' + y'\right),$$

$$y^{vi}(0) = -e^{-(0)}\left(y^{v}(0) - 4y^{iv}(0) + 6y'''(0) - 4y''(0) + y'(0)\right) = -21, \quad \Rightarrow a_6 = \frac{y^{v}(0)}{6!} = -\frac{21}{6!}$$

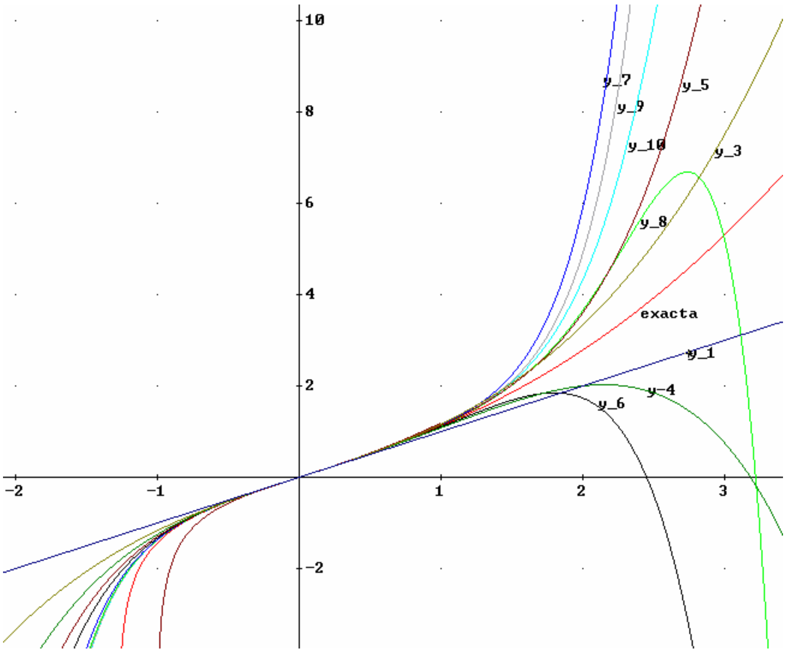
Siguiendo el proceso, encontramos la siguiente fórmula para $y^{(k)}(x)$ por lo tanto una formula un tanto no obvia para a_k :

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= -e^{-y}\left(\begin{aligned} &y^{(n-1)}(x) - \binom{n-2}{1} y^{(n-2)}(x) + \binom{n-2}{2} y^{(n-3)}(x) - \cdots \\ &\qquad + (-1)^{n}\binom{n-2}{n-3} y^{(2)}(x) + (-1)^{n+1} y'(x) \end{aligned} \right) \\ &= -e^{-y}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k}\binom{n-2}{k} y^{(n-1-k)}(x) \end{aligned}$$

Que al evaluar en x=0, obtenemos: $y^{(n)}(0) = -\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k}\binom{n-2}{k} y^{(n-1-k)}(0)$

De aquí una fórmula para los coeficientes a_k :

$$a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\left[-\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k}\binom{n-2}{k} y^{(n-1-k)}(0)\right]}{n!}, \; n \geq 0.$$



Bibilografía.

1. Charles E. Robertrs Jr., Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Un enfoque al cálculo numérico.Ed. Prentice-Hall Int. 1980.

2. Kreider, Kuller, Ostberg. Ecuaciones Diferenciales. Fondo Editorial Iberoamericano. 1973.

3. Derrick W. , Grossman S. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Fondo Editorial Iberoamericano. 1984

4. García J. O.,Villegas G. J. , Castaño B. J, Sánchez C., J.A. Ecuaciones Diferenciales. Fondo Editorial Universidad EAFIT, 2010.