SIGNIFICADO DE LA NO LINEALIDAD

Joaquín González Álvarez

El concepto *no-linealidad* en el contexto de las matemáticas viene apareciendo en la literatura científica con significativa mayor frecuencia, desde mediados del pasado siglo XX, al comenzar el auge de los temas que conforman la Teoría de la Complejidad, el Caos, el Fractal y análogos. Puede decirse que hasta ese momento en matemáticas se trataba de aproximar las funciones manejadas en física y disciplinas afines, de por si no lineales, mediante simple supresión de términos de grado superior al primero, a expresiones lineales mucho mas fáciles de manipular, aunque el resultado a veces se apartaba significativamente de la realidad física. Es así que se implementan nuevos y eficaces procedimientos de linealización que conducen a mayor aproximación a los valores verdaderos a la vez que los sistemas no lineales se hacen cada vez mas presentes en la ciencia moderna.

Las soluciones de las ecuaciones lineales pueden sumarse entre si y el resultado es también solución, lo cual no ocurre con las ecuaciones no lineales.

La linealidad viene dada en una ecuación por aparecer la o las, variables con potencias no distintas de 1. Para el caso de una sola variable y un solo término, o sea cuando se quiere expresar la variación de una variable y**,** proporcionalmente a otra x, se tiene la ecuación lineal $y = kx$, donde el coeficiente de proporcionalidad k es en este caso constante.

En el caso de que la ecuación se aplique a un sistema físico, biológico, social o de similar índole el cual tenga la propiedad de autoorganizarse como es el caso de los organismos vivos, la relación entre las variables no será directamente proporcional ya que el coeficiente, que por facilidad, seguiré llamando de proporcionalidad, no será constante.

Cuando se va a formar un duo de cantantes, el tono de una nota emitida por los dos no será sencillamente la nota emitida por uno sólo multiplicada por dos ($k=2$), no, será una armonización del conjunto de las dos. La armonización vendrá dada por un coeficiente no constante que dependerá de las nota (x) que da cada cantante por separado.

Ahora el coeficiente de proporcionalidad no será constante porque dependerá del valor que toma la variable x y se expresará por kx, pero sigue siendo un coeficiente de "proporcionalidad" y afectará a la x de modo que la ecuación para calcular el valor de y podrá escribirse en principio, $y = (kx)\,x$, y en definitiva: $y = kx^2$ donde se observa que aparece la x elevada a un exponente distinto de 1 lo cual evidencia que en los procesos que se presentan en sistemas que se autoorganizan o que se autosostienen como ocurre en los organismos vivos y en donde existen dispositivos de realimentación, las ecuaciones que los describen han de ser no lineales La no linealidad se evidencia por la potencia distinta de 1.

El término compuesto *no-lineal* hace referencia al hecho de que el gráfico cartesiano correspondiente a expresiones del tipo *y=f(x)* donde aparezcan potencias de x mayores que la primera, esto es que la expresión no sea de primer grado, será una curva y no una línea, entendiéndose por línea solamente la recta.

En el tratamiento de los sistemas cuyas variables lo son con el tiempo, esto es, sistemas dinámicos representados por sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo:

$$dx/dt= f(x.y)$$
$$dy/dt= g(x,y$$

que cuando son lineales aparecen en la forma:

$$dx/dt= ax+by$$
$$dy/dt= cx+dy$$

y por lo general son relativamente fáciles de resolver por matrices para lo cual se necesitará conocer el determinante del sistema a base de la matriz formada por los coeficientes del segundo miembro. Pero cuando se trate de sistemas no lineales la matriz del sistema habrá que sustituirla por el Jacobiano del sistema cuyo determinante y traza aportarán datos del comportamiento físico del sistema (estabilidad o no, periodicidad o no) sin necesidad de la solución matemática del sistema de ecuaciones diferenciales que mostramos mas arriba por lo general muy difícil de resolver y en gran parte de los casos, de imposible resolución.

Si a partir del citado sistema de ecuaciones diferenciales dividimos la segunda ecuación entre la primera, se obtiene:

$$dy/dx =g(x,y)/f(x,y)$$

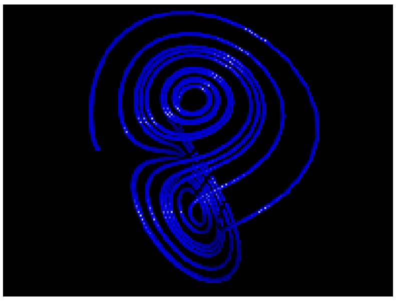
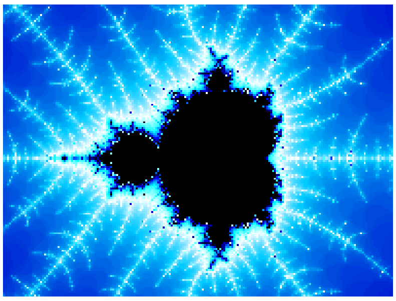
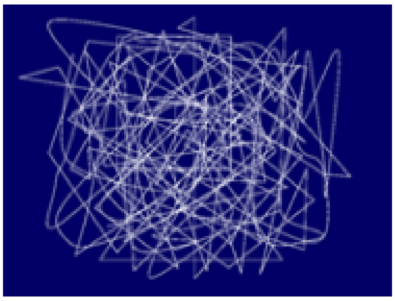
ecuación diferencial que nos permitirá conocer en el plano de las fases *x-y*, la relación *y= h(x)* que ploteada nos mostrará las llamadas trayectorias fásicas, las cuales en cada uno de sus puntos nos muestra el estado del sistema estudiado en función de las dos variables fásicas (que pueden ser posición y velocidad) conjugadas del sistema en cuestión. Un caso muy importante se da cuando una trayectoria fásica se cierra, lo cual indicará que si recorremos esa curva cerrada pasaremos una y otra vez por el mismo punto o estado indicando que el proceso que se estudia es oscilatorio. Los procesos oscilatorios están muy presentes en la naturaleza y en la práctica técnica y científica. Dada la dificultad y frecuentemente imposibilidad de resolver la ecuación diferencial, se suele acudir a métodos gráficos como el de situar convenientemente en puntos *(x,y)* determinados por *y= h(x)*, del plano fásico, flechitas en la dirección de la pendiente *dy/dx* calculada para el punto, las cuales darán idea del trazado de la trayectoria fásica a las cuales será tangente.

El conjunto de las trayectorias fásicas de un sistema se conoce como "retrato" fásico.

En sistemas dinámicos de menos de tres variables no se puede presentar la situación conocida como *caos*, pero en aras de la mejor comprensión en este trabajo nos limitamos a casos de dos variables.

Los procesos físicos reales son estrictamente hablando no lineales, los tratados como lineales sólo lo son con bastante aproximación.

En general la no linealidad se hace evidente en el tratamiento de los procesos alejados del equilibrio, en el caos y en todo sistema en el cual surjan propiedades emergentes o sea, las que aparecen al colectivizarse los elementos y presentarse propiedades que no manifiestan los elementos aisladamente (la nota armonizada del duo citado, surge al colectivizarse las notas que cada uno emitía por separado) en definitiva donde quiera que aparezcan sistemas de comportamiento complejo, con otras palabras en los sistemas que estudia la Complejidad. El duo de cantantes del ejemplo antes utilizado, es un sistema complejo con lo que vemos que la complejidad de un sistema no depende del número de elementos involucrados; la magnitud de complejidad viene dada por la longitud (número de bits) del programa informático que describe el proceso de constitución del sistema. Evidentemente el programa para el duo armonizado contiene mas bits que el necesario para poner a cantar al unísono.

El estudio de los sistemas complejos o sistemas con propiedades complejas, ha tomado en los últimos tiempo singular importancia de tal manera, que ha surgido como un nuevo paradigma la llamada Teoría de la Complejidad, donde se agrupan vertientes de la misma como lo son las teorías del Caos, la del Fractal así como la Termodinámica del No Equilibrio.

Característica fundamental de sistemas que se tratan en la Teoría de la Complejidad, es su no linealidad de ahí la importancia de esta propiedad de cuyo concepto hemos tratado en este artículo, limitándonos a ejemplos de sistemas de sólo dos variables en aras de una mas fácil comprensión.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com