Del número áureo a la sucesión de Fibonacci. Una curiosa relación

Carmen SÁNCHEZ DÍEZ

1. El número de oro:

Euclides (325 a.C.-265 a.C.) expone en sus Elementos:

"*Se dice que una línea recta está dividida en el extremo y su proporcional cuando la línea entera es al segmento mayor como el mayor es al menor".*

En el lenguaje que manejamos en la actualidad diríamos que *un segmento está dividido en la proporción áurea si la razón entre la longitud total del mismo y la longitud del mayor es la misma que la razón entre la longitud del mayor y la longitud del menor.*

Esta es la primera referencia segura que conocemos sobre esta proporción que hoy denominamos *número áureo, número de oro, divina proporción, etc.,* pues aunque algunos autores han sugerido la posibilidad de que el concepto esté contenido en tablillas encontradas en Babilonia y Asiria, con datación en 2000 años antes de Cristo, no existe una documentación fiable de que fuera conocido antes de la obra de Euclides.

Así, si un segmento se divide en dos partes, a y b, con a mayor que b, ambas estarán en la proporción áurea si la razón entre la longitud $a+b$ del segmento total y la longitud a del mayor es igual a la razón entre a y la longitud b del menor:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Esto quiere decir que se ha de verificar la relación algebraica $a^2 = a.b + b^2$, donde las variables a y b son números reales positivos. Si resolvemos la ecuación de segundo grado en a se tiene, tomando, obviamente, la raíz positiva:

$$a = \frac{b+\sqrt{b^2+4b^2}}{2} = b\frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Es decir, el número áureo es

$$\boxed{\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339...}$$

Se denomina *sección áurea* al inverso del opuesto del número áureo:

$$\varphi = -\frac{1}{\phi} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

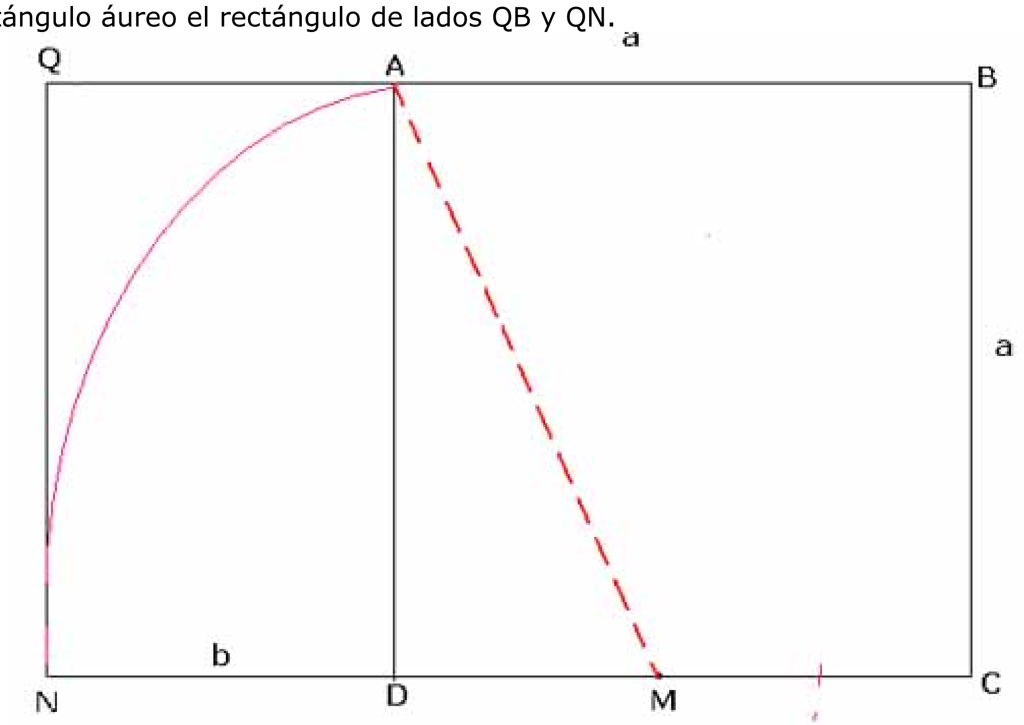
Y resulta para la sección áurea

$$\boxed{\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Se dice que un rectángulo de lados a y b está en la proporción áurea, o en la divina proporción, si ambos lados se encuentran en la proporción áurea.

Es muy sencillo encontrar gráficamente el lado menor b del rectángulo áureo cuando solo se conoce el lado mayor a.

Haremos lo siguiente: Dibujaremos el cuadrado de lado a y marcaremos, con un compás centrado en el punto medio M del lado CD, el arco de circunferencia que pasando por A corta en N a la prolongación del lado CD. Por N trazamos una perpendicular a dicha prolongación hasta cortar a la prolongación del lado AB en el punto Q. El rectángulo áureo es el rectángulo de vértices $QADN$. En tal rectángulo el lado a es AD y el lado b es ND. También, en este caso, es obvio que es también rectángulo áureo el rectángulo de lados QB y QN.



Comprobemos a continuación que ambos lados están en la proporción áurea, o sea que a/b= ϕ :

- Calculemos en primer lugar, mediante el teorema de Pitágoras, la longitud MA, que es igual, por construcción, a la longitud MN:

$$MA = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5} = MN$$

- Como $ND=b=MN\text{-}DM=\frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. O sea, $b = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- Por consiguiente, la proporción es:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{a\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{5})}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{5-1}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$$

2. La sucesión de Fibonacci:

El matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), conocido como Fibonacci, se hizo famoso tanto por su gran contribución a la divulgación en Europa del sistema de numeración indo-arábigo que utilizamos hoy, como por el descubrimiento de una sucesión de números reales, que se conoce desde entonces con su nombre.

Se trata de la sucesión que comenzando con los números $f_0 = 0, f_1 = 1$, cada término resulta ser la suma de los dos anteriores:

$$(f)_n = \{0,1,1,2,3,5,8,13,\ldots,f_n,\ldots\}$$

Así, pues, se tiene que $\forall n > 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

En realidad, las ideas básicas de la sucesión se encontraban en la obra de algunos matemáticos hindues como Pingala (200 a.C.), y ya en el siglo XII, la usaban Gopala (1135) y Hemachandra (1150).

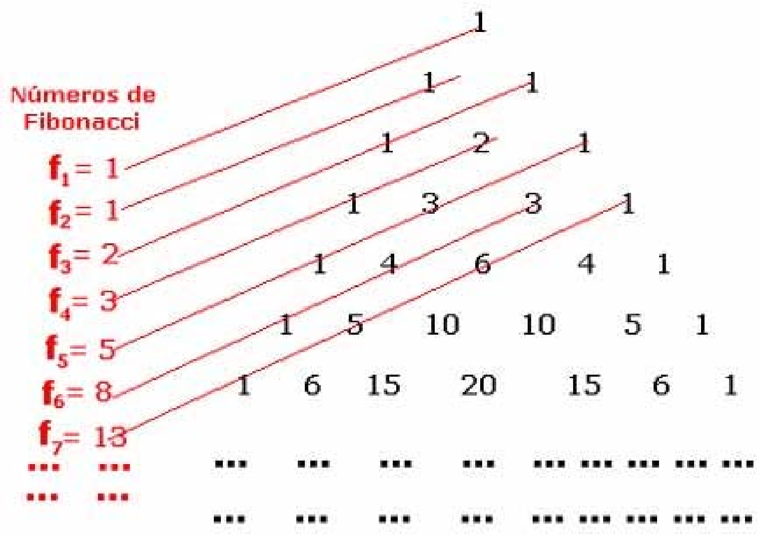
Fibonacci presentó la sucesión en su obra *Liber Abaci, en 1202, y* manifiesta haberla encontrado al resolver el problema de la cría de conejos: "*Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año, cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también*".

Siendo el periodo de gestación de unos 31-32 días, se trataría de conocer el número de animales (parejas) que existirán a los 12 meses, suponiendo que se reproducen continuamente y cada pareja de conejos da lugar a una nueva pareja (macho y hembra). Cada conejo se puede cruzar a la edad de un mes. Se tendría:

Al comienzo del primer mes:	1 pareja (la pareja original que se supone nace ahora).
Al final del primer mes:	1 pareja que se cruza (la pareja que nace al comienzo del primer mes).
Al final del segundo mes:	2 parejas (nace una pareja) y se vuelve a cruzar la primera pareja.
Al final del tercer mes:	3 parejas (nace la tercera pareja) y se cruzan las dos preexistentes.
Al final del cuarto mes:	5 parejas (nacen dos parejas) y se cruzan las tres preexistentes.
Al final del quinto mes:	8 parejas (nacen tres parejas) y se cruzan las cinco preexistentes.
Al final del sexto mes:	13 parejas (nacen cinco parejas) y se cruzan las ocho que existían.
Al final del séptimo mes:	21 parejas (nacen ocho parejas) y se cruzan las 13 preexistentes.
Al final del octavo mes:	34 parejas (nacen 13 parejas más) y se cruzan las 21 parejas que existían.
Al final del décimo mes:	55 parejas (21 que nacen ahora más

	las 34 que ya existían).
Al final del undécimo mes:	89 parejas que corresponden a las 55 que existían más las 34 que nacen ahora).
Al final del duodécimo mes:	144 parejas que son la suma de las 89 que existían mas 55 que nacen ahora.

Cada uno de los términos de la sucesión de Fibonacci se obtienen, como luego se comprobaría, sumando las diagonales del Triangulo de Tartaglia, tal como indicamos en la figura:



Triángulo de Tartaglia

Es decir,

$$f_1 = \binom{0}{0} = 1$$

$$f_2 = \binom{1}{0} = 1$$

$$f_3 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

$$f_4 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3$$

$$f_5 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$f_6 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 4 + 3 = 8$$

$$f_7 = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 5 + 6 + 1 = 13$$

… … … … … … … … … … … … … … … … … …

y el término general, f_n, vendrá dado por la suma

$$f_n = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-1-j}{j}$$

donde $\left[\frac{n}{2}\right]$ denota la parte entera de la mitad de n.

3. Relación del número de oro con la sucesión de Fibonacci:

Veamos algunas de las más importantes conexiones que existen entre la proporción áurea y los términos de la sucesión de Fibonacci.

3.1. Relación mixta:

Si dos números reales, a y b, se encuentran en la proporción áurea (es decir, si $a/b = \phi$) entonces se verifica que

$$\forall n \in N / n > 0, \; a^n = f_n.a.b^{n-1} + f_{n-1}.b^n$$

siendo f_n y f_{n-1} el término n-simo y el término n-1-ésimo, respectivamente, de la sucesión de Fibonacci.

Demostración:

$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \rightarrow a^2 = a.b + b^2$. Multiplicando esta relación por a y simplificando, se obtienen sucesivamente:

$a^2 = a.b + b^2$
$a^3 = 2a.b^2 + b^3$
$a^4 = 3a.b^3 + 2b^4$
$a^5 = 5.a.b^4 + 3b^5$
$a^6 = 8.a.b^5 + 5b^6$
… … … … … …
… … … … … …
$a^n = f_n.a.b^{n-1} + f_{n-1}.b^n$
… … … … … …
… … … … … …

Si sustituimos en la expresión general la medida a por $b.\phi$, se tendrá que:

$$b^n.\phi^n = f_n.b.\phi.b^{n-1} + f_{n-1}.b^n \rightarrow \phi^n = f_n.\phi + f_{n-1}$$

3.2. Obtención del número de oro desde la sucesión de Fibonacci:

El cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, f_{n+1}/f_n , se aproxima al número de oro cuando el orden de los términos crece indefinidamente:

$$\phi = \lim \frac{f_n}{f_{n-1}}$$

Demostración:

Por construcción de la sucesión es $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Dividiendo ambos miembros por f_{n-1} será:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \rightarrow \frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{1}{f_{n-1}/f_{n-2}} \rightarrow \lim \frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\lim \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}$$

Llamando $L = \lim \frac{f_n}{f_{n-1}} = \lim \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}$, se tiene: $L = 1 + \frac{1}{L}$, o sea, $L^2 = L + 1$, ecuación de segundo grado cuya única raíz válida es $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

Luego se verifica que $\phi = \lim \frac{f_n}{f_{n-1}}$

3.3. Obtención del término general de la sucesión de Fibonacci desde el número de oro:

Usando el número áureo es posible deducir una fórmula que permite obtener el término general de la sucesión, para todo valor n. Esto hace posible que se pueda calcular un término cualquiera de la sucesión de Fibonacci sin necesidad de calcular todos los términos anteriores. La fórmula que nos facilita esto es la *expresión de Binet-Moivre*:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n\right]$$

Demostración:

De ser $\phi^2 = \phi + 1$, si multiplicamos toda la expresión por ϕ^{n-2} : $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$, es decir, ϕ^n satisface la sucesión de Fibonacci.

Análogamente la sección áurea, $\varphi = -1/\phi$: $\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n = \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-2}$, y como son del mismo signo los términos $\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n$ y $\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-2}$ se tendrá: $\frac{1}{\varphi^n} = -\frac{1}{\varphi^{n-1}} + \frac{1}{\varphi^{n-2}}$

y, multiplicando ahora toda la expresión por φ^{2n} : $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$, o, en definitiva, $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$, con lo que también satisface la sucesión de Fibonacci.

Esto nos permite expresar los términos de la sucesión en la forma $f_n = a\phi^n + b\varphi^n$, eligiendo los coeficientes a y b de forma que se verifiquen las condiciones de definición de la sucesión de Fibonacci:

1) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, o sea: $a\phi^n + b\varphi^n = a\phi^{n-1} + b\varphi^{n-1} + a\phi^{n-2} + b\varphi^{n-2}$
2) $f_0 = 0$, es decir: $a + b = 0$
3) $f_1 = 1$, que nos dice: $a\phi + b\varphi = 1$

El valor de los coeficientes a y b se obtienen de inmediato: $b = -a \to a\phi - a\varphi = 1$, de donde:

$$a = \frac{1}{\phi - \varphi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = -a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

lo que nos da finalmente:

$$f_n = a\phi^n + b\varphi^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n\right]$$

4. Documentación bibliográfica:

Huntley, H.E.; *The divine proportion*, Dover Publications, Inc., 1970, Nueva York.