SOBRE LA CONJETURA DE LOS NÚMEROS PRIMOS (n^2+1)

Niceto Valcárcel Yeste. Licenciado en cc.físicas por la U.N.E.D.

December 3, 2011

1 Introducción.

Esta conjetura, que pertenece a los conocidos como " cuatro problemas de Landau " , plantea si existen o no infinitos números primos de la forma $\left(n^2+1\right)$.

El propósito de este estudio, es el de obtener el conjunto de los números naturales s , cuyo cuadrado es tal que el número $4s^2+1$, es un número no primo.

Tal conjunto se designa por $\{s\} = \left\{s \in IN / \left(4s^2+1\right) \notin IP\right\}$, donde IP es el conjunto de los números primos. El conjunto complementario de $\{s\}$ respecto del conjunto de los números naturales es aquél apartir del cual se obtienen todos los números primos de la forma $4s^2+1$.

Para obtener $\{s\}$ se utiliza la conocida propiedad sobre los números de la forma $\left(4s^2+1\right)$ siguiente:

" todos los números primos que forman parte de la factorización del número $\left(4s^2+1\right)$, son números primos de la forma $(4x+1)$, para todo $s \in IN$."

(El artículo publicado en la web CASANCHI, de este mismo autor, titulado: " Descomposición factorial de los números de la forma $\left(n^2+1\right)$" , contiene una demostración de esta propiedad, aunque como se dijo anteriormente, es una propiedad ya conocida y demostrada con anterioridad).

2 El conjunto $\{s\}$.

Si el número $\left(4s^2+1\right)$ es no primo, y es $(4x+1)$ cualquiera de los números primos que forman parte de su descomposición factorial, se cumple:

$4s^2+1 = (4x+1)(4k+1)$

siendo $(4k+1)$ el resto de factores, $k \in IN - \{0\}$.

Ha de ser:

$s = y(4x+1) \pm z$

siendo z el menor número natural para el que se cumple:

$4z^2+1 = (4x+1)(4k'+1) = 4(4xk'+x+k')+1.$

$\{s\} = \{\{y(4x+1)+z\} \cup \{y(4x+1)-z\}\}$

Siempre existe z bajo las condiciones impuestas pues:
$4s^2+1=(4x+1)(4k+1)=4\left(y^2(4x+1)^2+z^2+2yz(4x+1)\right)+1$
y en consecuencia:
$4z^2+1=(4x+1)(4k'+1)$
y por tanto,
$z^2=k'(4x+1)+x$
Obtenido z, cuando y recorre el conjunto de los números naturales, se obtienen los $s\in\{s\}$.

El valor de z para cada número primo $(4x+1)$ es el encontrando para el menor valor k' para el que se cumple $z^2=k'(4x+1)+x$.

Para los primeros números primos de la forma $(4x+1)$, los valores de z y k' se obtienen:

$x=1\Longrightarrow 4x+1=5\Longrightarrow z^2=5k'+1=\{1,6,11,16,...\}, k'=0; z^2=1^2$
$x=3\Longrightarrow 4x+1=13\Longrightarrow z^2=13k'+3=\{3,16,29,42,...\}; k'=1; z^2=4^2$
$x=4\Longrightarrow 4x+1=17\Longrightarrow z^2=17k'+4=\{4,21,38,55,...\}\ k'=0; z^2=2^2$
$x=7\Longrightarrow 4x+1=29\Longrightarrow z^2=29k'+7=\{7,36,65,94,...\}; k'=1; z^2=6^2$
$x=9\Longrightarrow 4x+1=37\Longrightarrow z^2=37k'+9=\{9.46,83,120...\}; k'=0; z^2=3^2$
$x=10\Longrightarrow 4x+1=41\Longrightarrow z^2=41k'+10=\{10,..,256,..\}; k'=6; z^2=16^2$
$x=13\Longrightarrow 4x+1=53\Longrightarrow z^2=53k'+13=\{13,..,225,..\}; k'=4; z^2=15^2$
$x=15\Longrightarrow 4x+1=61\Longrightarrow z^2=61k'+15=\{15,.,625,.\}; k'=10; z^2=25^2$
$x=18\Longrightarrow 4x+1=73\Longrightarrow z^2=73k'+18=\{18,..,529,.\}; k'=7; z^2=23^2$
$x=22\Longrightarrow 4x+1=89\Longrightarrow z^2=89k'+22=\{22,..,289,..\}; k'=3; z^2=17^2$
$x=24\Longrightarrow 4x+1=97\Longrightarrow z^2=97k'+24=\{24,121,.....\}; k'=1; z^2=11^2$
$x=25\Longrightarrow 4x+1=101\Longrightarrow z^2=101k'+25=\{25,126,.\}; k'=0; z^2=5^2$
.
y así sucesivamente para los valores de x para los que $(4x+1)$ es número primo.

Se obtienen los subconjuntos $\{s_{ij}\}\subset\{s\}$, tales que $\{s\}=\{\{s_{11}\}\cup\{s_{12}\}\cup\{s_{31}\}\cup\{s_{32}\}\cup....\infty\}$
:
$\{s_{11}\}=\{5y-1\}=\{4,9,14,19,............\}$
$\{s_{12}\}=\{5y+1\}=\{6,11,16,21,.........\}$
$\{s_{31}\}=\{13y-4\}=\{9,22,35,48,........\}$
$\{s_{32}\}=\{13y+4\}=\{17,30,43,56,.....\}$
$\{s_{41}\}=\{17y-2\}=\{15,32,49,66.......\}$
$\{s_{42}\}=\{17y+2\}=\{19,36,53,70,......\}$
$\{s_{71}\}=\{29y-6\}=\{23,52,81,110,.....\}$
$\{s_{72}\}=\{29y+6\}=\{35,64,93,...........\}$
$\{s_{92}\}=\{37y-3\}=\{34,71,108..........\}$
$\{s_{72}\}=\{37y+3\}=\{40,77,114..........\}$
$\{s_{101}\}=\{41y-16\}=\{25,66,107,.......\}$
$\{s_{102}\}=\{41y+16\}=\{57,98,139,......\}$
$\{s_{131}\}=\{53y-15\}=\{38,91,144........\}$
$\{s_{132}\}=\{53y+15\}=\{68,121,174,....\}$
$\{s_{151}\}=\{61y-25\}=\{36,97,158,.......\}$
$\{s_{152}\}=\{61y+25\}=\{86,147,208,....\}$

$\{s_{181}\} = \{73y - 23\} = \{50; 123, 196, ...\}$
$\{s_{182}\} = \{73y + 23\} = \{96, 169, 242, ...\}$
$\{s_{221}\} = \{89y - 17\} = \{72; 161, 250, ...\}$
$\{s_{222}\} = \{89y + 17\} = \{106, 195, 284, ..\}$
$\{s_{241}\} = \{97y - 11\} = \{86; 183, 280, ...\}$
$\{s_{242}\} = \{97y + 11\} = \{108; 205, ...\}$
$\{s_{251}\} = \{101y - 5\} = \{96, 197, 298, ...\}$
$\{s_{252}\} = \{101y + 5\} = \{106, 207, 308, ..\}$
$\{s_{271}\} = \{109y - 38\} = \{71, 180, 289, ...\}$
$\{s_{272}\} = \{109y + 38\} = \{147, 256, ...\}$
y así sucesivamente para todos los números primos de la forma $(4x + 1)$.
$\{s\} = \{\{s_{11}\} \cup \{s_{12}\} \cup ....\} =$
$= \{4, 6, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40, \}$
$= \{41, 43, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 59, 61, 64, 66, 68, 69, 70, 71, 72, ...\infty\}$

El conjunto complementario de éste respecto del conjunto de los números naturales, $\{\overline{s}\}$, es el conjunto de los números cuyos cuadrados son tales que $4\left(\overline{s}\right)^2 + 1$ es número primo. $IN = \{\{s\} \cup \{\overline{s}\}\}$:
$\{\overline{s}\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 18, 20, 27, 28, 33, 37, 42, 45, 47, 55, 58, 60, 62, 63, 65, 67, ..\infty\}$

Agradezco al lector el tiempo empleado, así como sus comentarios, que podrá enviarme a:
nicetovalcarcel@gmail.com