La proporcionalidad de segmentos en el plano. Una mirada a la Geometría Clásica.

Podemos construir de manera sencilla en el plano la teoría clásica de los segmentos y de sus razones y proporcionalidades usando los axiomas introducidos por Hilbert para los movimientos en *Grundlagen der Geometrie*, junto con los Axiomas de Desargues y de Pappus para el paralelismo de segmentos.

1. Introducción. Axiomas de los movimientos y del paralelismo:

1.1. Segmento. Segmento orientado:

Dados dos puntos del plano, A y B, llamaremos segmento AB al conjunto infinito de los puntos de la recta que contiene a ambos puntos y se encuentran situados entre ambos. Es inmediato que el segmento AB coincide con el segmento BA. Una semirrecta de origen en A es un segmento infinito de origen A.

El segmento orientado o vector $\vec{AB}$ se define como par

$$\vec{AB} = \{AB, (A,B)\}$$

donde (A,B) es un par ordenado. El punto A es el origen y el punto B se denomina extremo del segmento orientado.

Llamaremos n-Referencia de Thales de origen O a un conjunto de n rectas del plano que pasan por el punto O. La podemos representar por $O(r_1,\ldots,r_n)$.

Para construir la teoría de los segmentos y de sus razones y proporcionalidades usaremos los axiomas introducidos por Hilbert (Grundlagen der Geometrie) para los movimientos, junto con los Axiomas de Desargues y de Pappus para el paralelismo de segmentos.

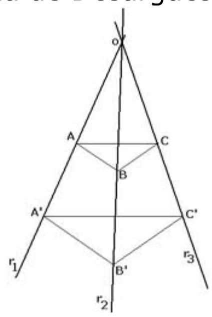
1.2. Axiomas:

Axiomas de Hilbert para los movimientos:

1. Los movimientos del plano son aplicaciones biyectivas del plano en sí mismo.

2. Existe un y solo un movimiento que transforma biunívocamente una semirrecta en otra semirrecta, y uno de los semiplanos determinados por la primera recta en otro de los semiplanos determinados por la segunda recta.
3. Los movimientos transforman rectas en rectas conservando el orden de sus puntos.
4. Los movimientos no transforman segmentos ni ángulos en parte de los mismos.
5. Los movimientos forman grupos.

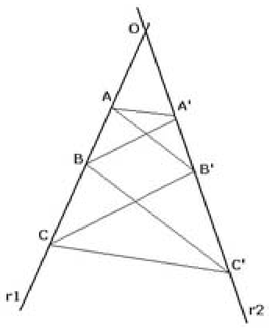
Axioma de Desargues:



Dadas tres rectas r_1, r_2 y r_3, y dos puntos en cada recta, $A, A' \in r_1$, $B, B' \in r_2$, $C, C' \in r_3$, de forma que r_1 y r_2 se cortan en un punto O y son paralelos los segmentos AB y $A'B'$, y también son paralelos los segmentos AC y $A'C'$, entonces se verifica que:

$$BC \text{ es paralelo a } B'C' \Leftrightarrow O \in r_3$$

Axioma de Pappus:



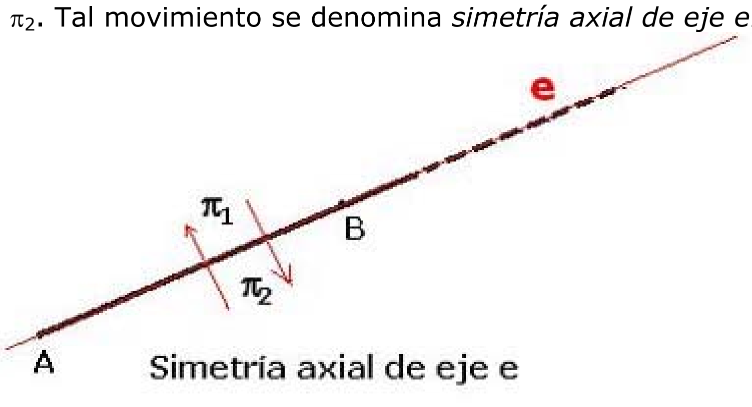
Dada una 2-Referencia de Thales $O(r_1, r_2)$ y sean A, B, C, tres puntos de la recta r_1 y A′, B′, C′ tres puntos de la recta r_2. Entonces se verifica que si

AA′ es paralelo a CC′ y AB′ es paralelo a BC′ entonces también BA′ es paralelo a CB′.

1.3. Consecuencias inmediatas de los axiomas:

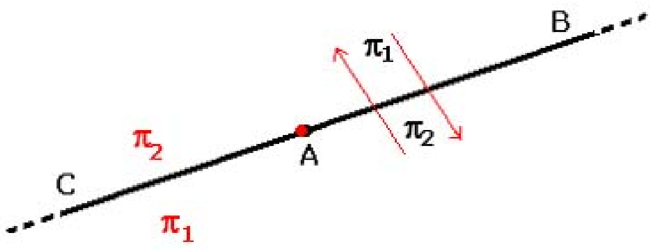
a) Existencia de simetrías axiales:

Por el segundo de los axiomas de Hilbert, existe un único movimiento que transforma una semirrecta en sí misma e intercambia entre si los semiplanos definidos, π_1 y π_2. Tal movimiento se denomina *simetría axial de eje e.*



b) Existencia de simetrías centrales:

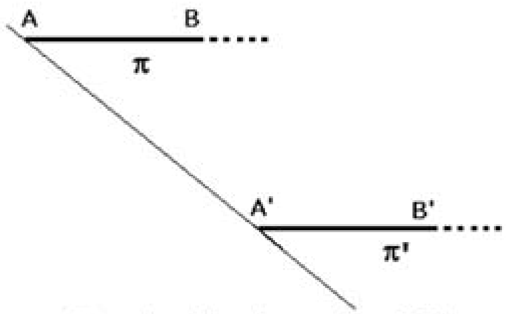
Por el segundo de los axiomas de Hilbert existe un único movimiento que transforma la semirrecta AB en la semirrecta AC intercambiando los semiplanos definidos por la misma, π_1 y π_2. Denominamos a este movimiento *Simetría central de centro A.*



Simetría central de centro A

c) Existencia de traslaciones:

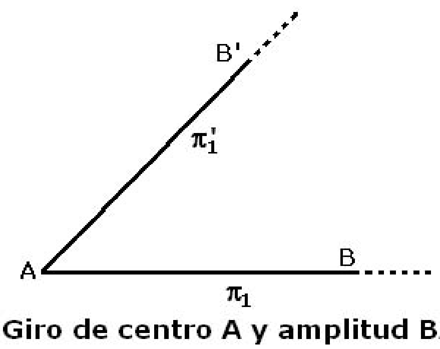
Por el segundo de los axiomas de Hilbert existe un único movimiento que transforma la semirrecta AB en la semirrecta paralela A'B' y el plano π en el plano π'. Llamamos a este movimiento *Traslación de vector AA'.*



Traslación de vector AA'

d) Existencia de giros:

Por el segundo de los axiomas de Hilbert existe un único movimiento que transforma la semirrecta AB en la semirrecta AB' y el plano π_1 en el plano π'_1. Tal movimiento se denomina *Giro de amplitud BAB' y centro A.*



Giro de centro A y amplitud BAB'

Teorema 1.3.1.:

Todo movimiento se reduce al producto de un número finito de simetrías axiales.

Demostración: trivial.

Se llaman *movimientos directos* aquellos que se descomponen en un nº par de simetrías axiales. De estos movimientos se dice que conservan el sentido de las figuras.

Los *movimientos inversos* son aquellos que admiten un número impar de simetrías axiales. Se dice que invierten el sentido de las figuras.

Los movimientos directos constituyen un subgrupo del grupo de los movimientos.

1.4. Los segmentos generales absolutos del plano:

- Relación de congruencia:

Dos figuras del plano se dicen congruentes o iguales si existe un movimiento que transforma una en la otra.

Esta relación es obviamente reflexiva, simétrica y transitiva, por lo que es de equivalencia.

- La familia de los segmentos generales absolutos:

Si consideramos la familia S de los segmentos del plano dotada de la relación R_c de congruencia, tal relación parte a S en clases de equivalencia que se denominan segmentos generales absolutos del plano:

$$\sum = S / R_c$$

Cada uno de los segmentos a,b,c,... de Σ es el conjunto de todos los segmentos de S congruentes entre sí.

$$\sum = \{a, b, c, ...\}$$

Si, por ejemplo, es AA' uno de los representantes del segmento general absoluto *a*, este se puede representar por [AA']. Análogamente, se pueden representar por [BB'], [CC'],... los segmentos generales absolutos b, c, ...

$$\sum = \{[AA'], [BB'], [CC'], ...\}$$

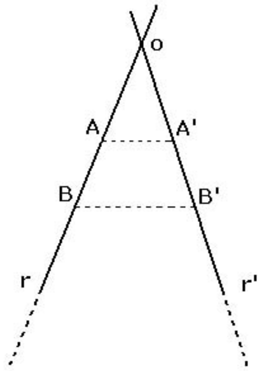
En el conjunto Σ se define tanto la adición de segmentos generales absolutos y el producto por números naturales como una relación de orden total, probándose fácilmente que estas operaciones confieren a dicho conjunto estructura algebraica de N-semimódulo ordenado:

$$(\Sigma, +, .N, \leq)$$

2. **Razones de segmentos:**

Vamos a definir ahora dentro del producto cartesiano N-semimódulo ordenado de los segmentos generales absolutos del plano por sí mismo una relación que veremos será de equivalencia, esto es, una relación entre pares de segmentos generales absolutos.

Definición 2.1.:



Si consideremos el conjunto producto cartesiano Σx(Σ-{0}), podemos definir una relación R entre sus pares de elementos de la manera siguiente:

Dada la referencia de Thales de dos rectas $O(r,r')$, y los puntos A, B de la recta r, y A′, B′ de la recta r′, donde es OA∈a, OB∈b, OA′∈a′, OB′∈b′, decimos que (a,a′) está relacionado con (b,b′) si y solo sí el segmento AA′ es paralelo al segmento BB′.

O sea, se tiene:

$$(a,a')R(b,b') \Leftrightarrow AA' \| BB'$$

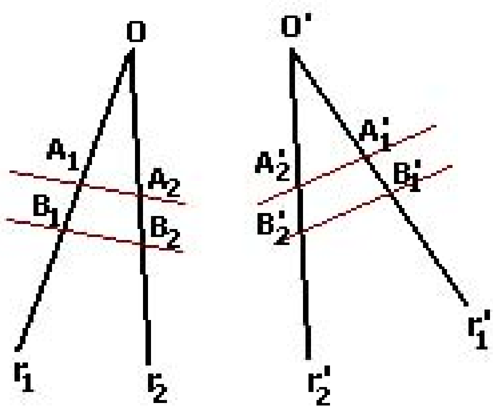
Teorema 2.1.:

a) La relación *R* no depende de la 2-referencia de Thales *O(r,r′)* elegida.
b) La relación *R* es de equivalencia.

Demostración:

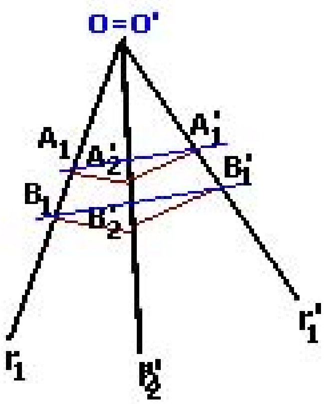
a) Sean $0A_1$, $O'A'_1,\in a_1$, $0A_2$, $O'A'_2,\in a_2$, $0B_1$, $O'B'_1,\in b_1$, $0B_2$, $O'B'_2,\in b_2$ en las referencias de Thales de dos rectas $O(r_1, r_2)$, $O'(r'_1,r'_2)$. Se trata de probar que si los segmentos AA y BB son paralelos en una de las referencias, también son paralelos en la otra:

$$A_1A_2 \| B_1B_2 \Leftrightarrow A'_1\,A'_2 \| B'_1\,B'_2$$



Para ello superponemos la recta r′2 sobre la recta r2, con lo cual coincidirán los puntos A2 con A′2 , B2 con B′2, y también coinciden los origenes O y O′ de ambas referencias de Thales.

La figura quedaría en la forma siguiente:



Por hipótesis, es

$$A_1A_2 \| B_1B_2$$

O lo que es lo igual

$$A_1A'_2 \| B_1B'_2$$

r'_1 corta a r_1 y a r_2 en el punto O=O'.

Como $OA_1 = OA'_1$ Y $OB_1 = OB'_1$, será también $A_1A'_1 \| B_1B'_1$

Se tiene en definitiva, que $A_1A_2 \| B_1B_2$ y $A_1A'_1 \| B_1B'_1$, por lo que, por el Axioma de Desargues, es $A'_1A'_2 \| B'_1B'_2$

b) R es relación de equivalencia:

1_ Es reflexiva: $AA' \| AA' \Rightarrow (a,a')R(a,a')$

2_ Es simétrica: $\left[AA' \| BB' \Rightarrow BB' \| AA'\right] \Rightarrow \left[(a,a')R(b,b') \Rightarrow (b,b')R(a,a')\right]$

3_ Es transitiva: $\left[\left.\begin{matrix} AA' \| BB' \\ BB' \| CC' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA' \| CC'\right] \Rightarrow \left[\left.\begin{matrix} (a,a')R(b,b') \\ (b,b')R(c,c') \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a,a')R(c,c')\right]$

Definición 2.1.:

El conjunto cociente de Σx(Σ-{0}) por la relación de equivalencia R está formado por todas las parejas de segmentos generales relacionados entre sí por la relación R, que se denomina *conjunto de las razones de segmentos generales*

$$R_a = \frac{\sum x\left(\sum - \{0\}\right)}{R} = \{r_1, r_2, \ldots\}$$

donde son

$$r_1 = \{(a_1,b_1),(a'_1,b'_1),\ldots/(a_1,b_1)R(a'_1,b'_1)R\ldots\}$$
$$r_2 = \{(a_2,b_2),(a'_2,b'_2),\ldots/(a_2,b_2)R(a'_2,b'_2)R\ldots\}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Usaremos para cada razón la notación (a,b) o bien $\frac{a}{b}$ o también a/b.

También emplearemos el signo igual (=) para indicar que dos pares de segmentos generales absolutos pertenecen a la misma razón. Así, indicaremos cada razón por

$$r_1 = \left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a'_1}{b'_1}, \ldots / \frac{a_1}{b_1} = \frac{a'_1}{b'_1} = \ldots\right\}$$
$$r_2 = \left\{\frac{a_2}{b_2}, \frac{a'_2}{b'_2}, \ldots / \frac{a_2}{b_2} = \frac{a'_2}{b'_2} = \ldots\right\}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Teorema 2.2.:

Si es $O(r_1,r_2)$ una 2-Referencia de Thales, y es

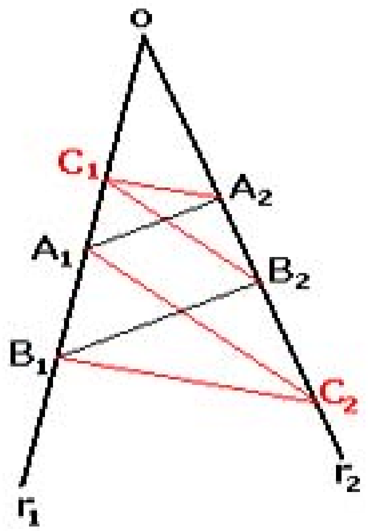
$$\begin{array}{lll} A_1B_1 \in r_1 & OA_1 \in a_1 & OB_1 \in b_1 \\ A_2B_2 \in r_2 & OA_2 \in a_2 & OB_2 \in b_2 \end{array}$$

se verifica:

1) $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} \Rightarrow A_1A_2 \| B_1B_2$

2) $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} \Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$

Demostración:



1) Tomamos adicionalmente un punto C_1 de r_1 y un punto C_2 de r_2 que cumplan que $OC_1 \in a_2$ y $OC_2 \in b_1$. Se tiene:

$$c_1A_2 \| B_1C_2$$

y como por hipótesis es

$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} \Rightarrow A_1C_2 \| C_1B_2$, se tiene, por el axioma de Pappus:

$$A_1A_2 \| B_1B_2$$

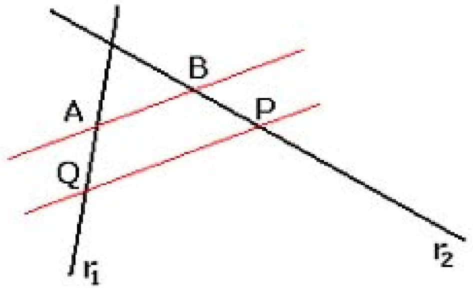
2) Si es $A_1A_2 \| B_1B_2$ entonces $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$

Teorema 2.3.:

Para toda razón (a,b) de segmentos generales absolutos, existe un representante (q,p), donde es p un segmento general absoluto dado.

Demostración:

Sea la 2-Referencia de Thales *O(r₁, r₂)* y sean los puntos $A \in r_1$ y $B, P \in r_2$, tales que $OA \in a, OB \in b, OP \in p$.



Trazamos la recta PQ de modo que

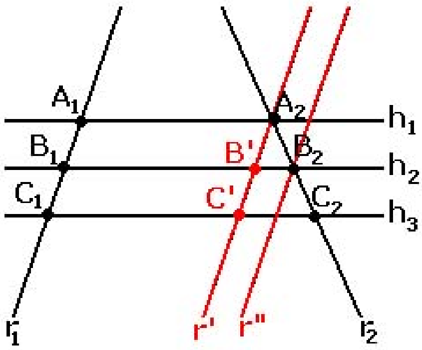
$$AB \| PQ$$

con lo cual encontramos un segmento general absoluto de representante OQ :

q=[OQ] cumpliendo: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{q}{p}$

Teorema 2.4. (Teorema de Thales):

Dadas dos rectas cualesquiera del plano, r_1 y r_2, que son cortadas por tres rectas paralelas, h_1, h_2, h_3, en los puntos A_1, B_1, C_1 a la recta r_1, y en los puntos A_2, B_2, C_2 a la recta r_2, se verifica entonces que



$$\frac{[A_1B_1]}{[A_2B_2]}=\frac{[B_1C_1]}{[B_2C_2]}=\frac{[A_1C_1]}{[A_2C_2]}$$

Demostración:

Si trazamos por A_2 una recta r' paralela a r_1:

$$\frac{[A_1B']}{[A_2B_2]}=\frac{[A_2C']}{[A_2C_2]}$$

y como es $A_2B'=A_1B_1$, $A_2C'=A_1C_1$, se tiene:

$$\frac{[A_1B_1]}{[A_2B_2]}=\frac{[A_2C_1]}{[A_2C_2]}$$

Si trazamos por B_2 una recta r″ paralela a r':

$$\frac{[A_1B_1]}{[A_2B_2]}=\frac{[B_1C_1]}{[B_2C_2]}$$

y de ambas, se obtiene el teorema.

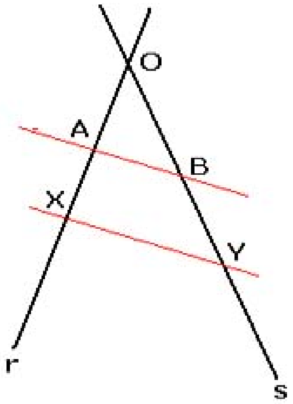
3. Proporcionalidades:

Definición 3.1.:

Dado el par de segmentos generales absolutos $(a,b) \in \sum x \sum$ con representantes $OA \in a, OB \in b$, se define la correspondencia $(a,b): \sum \to \sum$, es decir, tal que $\forall x \in \sum, (a,b)(x) = y \in \sum$, de modo que si es $OX \in x, OY \in y$, al tomar en una 2-referencia de Thales O(r,s) los representantes mencionados de modo que $OA, OX \in r, OB, OY \in s$, entonces se cumpla que

$$AB \| XY$$

A tal correspondencia se le llamará en adelante *proporcionalidad asociada al par (a,b).*

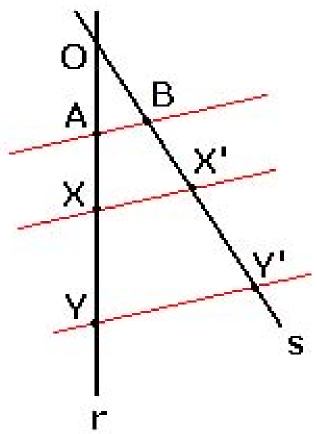


Teorema 3.1.:

La proporcionalidad asociada al par (a,b) de segmentos generales absolutos es un automorfismo del N-semimódulo ordenado $\left(\sum ,+,.,\leq\right)$.

Demostración:

Veamos que es homomorfismo, que es sobreyectiva y que es inyectiva.



Consideremos en la figura de la izquierda que $A, X, Y \in r,\ B \in s$, y elijamos los puntos $X', Y' \in s$ por la condición de que sea

$$AB \| XX',\ AB \| YY'.$$

Si es:

$OA \in a, OB \in b, OX \in x, OY \in y, OX' \in x', OY' \in y'$ se tiene, por definición, que

$$(a,b)(x) = x',\ (a,b)(y) = y'$$

Si es $XY \in w, X'Y' \in w'$ se tiene que

$$OX + XY = OY \Rightarrow x + w = y, OX' + X'Y' = OY' \Rightarrow x' + w' = y'$$

por lo cual:

$$(a,b)(y) = (a,b)(x+w) = y' = x' + w' = (a,b)(x) + (a,b)(w)$$

En definitiva, $\forall x, w \in \sum, (a,b)(x+w) = (a,b)(x) + (a,b)(w)$

Lo que nos dice que $(a,b): \sum \rightarrow \sum$ es homomorfismo.

Para ver que es sobreyectiva, basta considerar que fijado un $OX' \in x'$ cualquiera con $X' \in s$ en la figura, basta trazar por $X' \in s$ una paralela a *AB* para encontrar un punto $X \in r$, $OX \in x$, esto es, cualquiera que sea el segmento $x' \in \sum$ existirá un $x \in \sum / (a,b)(x) = x'$, o dicho de otro modo, todo elemento $x' \in \sum$ es imagen de algún otro elemento $x \in \sum$

Finalmente, la correspondencia es inyectiva pues si x'=y', quiere decir esto que en la figura OX'=OY', lo que nos indica que OX=OY, puesto que no pueden pasar por X e Y dos paralelas distintas XX' y YY' a AB.

Teorema 3.2.:

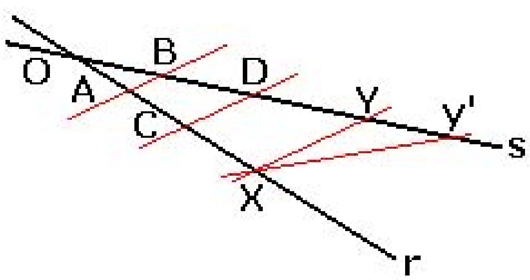
La condición necesaria y suficiente para que los pares $(a,b),(c,d) \in \sum x \left(\sum - \{0\}\right)$ definan la misma proporcionalidad es que pertenezcan a la misma razón, es decir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Demostración:

- Veamos que si definen la misma proporcionalidad, entonces pertenecen a la misma razón:

$$\left.\begin{aligned}(a,b)(x) &= y\\(c,d)(x) &= y\end{aligned}\right\} \Rightarrow AB \| XY,\ CD \| XY \Rightarrow AB \| CD \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

- Veamos ahora que si pertenecen a la misma razón definen la misma proporcionalidad:



Si es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces no puede ser $(a,b) = y \neq y' = (c,d)(x)$, pues ello indicaría que habrían de pasar por el punto *X* dos paralelas distintas a *AB*, una sería *XY* y la otra *XY'*.

Existe, en definitiva, una correspondencia biunívoca entre el conjunto de las proporcionalidades del plano y el conjunto de las razones de segmentos generales absolutos.

4. El semicuerpo conmutativo de las razones de segmentos. El cuerpo conmutativo de las razones orientadas:

Definición 4.1.:

Dadas las proporcionalidades p_1 y p_2, se define la proporcionalidad suma como la aplicación:

$$\forall x \in \sum, (p_1 + p_2)(x) = p_1(x) + p_2(x)$$

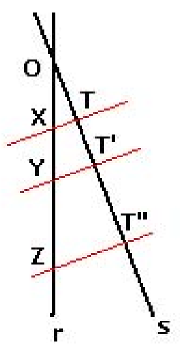
Teorema 4.1.:

Si son p_1 y p_2 proporcionalidades de razones respectivas a/b y c/d, entonces p_1+p_2 es otra proporcionalidad de razón $\frac{y+z}{x}$, siendo y= p_1 (x), z=$p_2(x)$.

Demostración:

Si son *a/b* y *c/d* las razones asociadas respectivamente a p_1 y a p_2 se tiene, para un segmento general *x* cualquiera, que

$$\frac{a}{b}(x) = y \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{y}{x}$$
$$\frac{c}{d}(x) = z \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{z}{x}$$



Si en la 2-referencia de Thales de la figura, se tiene que $OX \in x, OY \in y, YZ \in z, OT \in t$,
se puede expresar que

$$\forall t \in \sum, (p_1 + p_2)(t) = p_1(t) + p_2(t) = \frac{y}{x}(t) + \frac{z}{x}(t) =$$

$$= [OT'] + [T'T''] = [0T''] = \frac{y+z}{x}(t)$$

por tanto:

$$(p_1 + p_2)(t) = \frac{y+z}{x}(t), \quad \forall t \in \sum$$

Teorema 4.2.:

El par $(R_a, +)$ es un semigrupo conmutativo con elemento neutro, isomorfo a $(\sum, +)$.

Demostración:

Podemos definir, en virtud del anterior teorema, la suma de razones a/b y c/d como la razón de la proporcionalidad suma de las proporcionalidades asociadas a *a/b* y a *c/d*:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{y+z}{x}$$

siendo $\frac{a}{b}(x)=y,\ \frac{c}{d}(x)=z$.

Veamos que se verifican los propiedades que convierten a $(R_a,+)$ en semigrupo conmutativo con elemento neutro:

- Propiedad uniforme:

La razón de la proporcionalidad suma $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{y+z}{x}$ no depende del segmento x elegido, pues de haber elegido otro, x', se tendría: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{y'+z'}{x'}$, por lo cual es

$$\frac{y+z}{x}=\frac{y'+z'}{x'}$$

es decir, para cada x quedan determinados los segmentos *y* y *z.*

- Propiedad asociativa:

Si es $\frac{a}{b}(x)=y,\ \frac{c}{d}(x)=z, \frac{e}{f}(x)=w$, se tiene:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{y+z}{x}+\frac{w}{x}=\frac{(y+z)+w}{x}=\frac{y+(z+w)}{x}=\frac{y}{x}+\frac{z+w}{x}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$

- Propiedad conmutativa:

Si es $\frac{a}{b}(x)=y,\ \frac{c}{d}(x)=z$, se tiene:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{y+z}{x}=\frac{z+y}{x}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

- Propiedad de elemento neutro:

Consideremos la razón $\frac{0}{a}$, donde 0 representa al segmento nulo. Se tiene que $\frac{0}{a}(x)=0, \forall x\in\sum$. Por tanto, si $\frac{c}{d}(x)=z$: $\frac{0}{a}+\frac{c}{d}=\frac{0+z}{x}=\frac{z}{x}=\frac{c}{d}$

Por consiguiente, se trata, a falta del elemento simétrico para la suma, de un semigrupo conmutativo con elemento neutro (nulo).

Veamos a continuación que es isomorfo al semigrupo aditivo conmutativo de los segmentos generales absolutos del plano.

Fijado un segmento $b \in \sum$ se tiene que $\forall \frac{a}{b} \in R_a,\ f_b\left(\frac{a}{b}\right) = a \in \sum$ es inyectiva. La inversa, $f_b^{-1} : \sum \ \rightarrow R_a$, queda definida por $\forall a \in \sum$, $f_b^{-1}(a) = \frac{a}{b} \in R_a$ que es también inyectiva. Luego, se trata de una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos.

Y teniendo en cuenta que $f_b\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) = f_b\left(\frac{a}{b}\right) + f_b\left(\frac{c}{b}\right)$, se trata de un isomorfismo.

Definición 4.3.:

Se define la diferencia entre dos razones $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ como la razón $\frac{m}{n}$ tal que se cumpla que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{m}{n}$. O sea: $\frac{m}{n} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{y - z}{x}$, que existirá sólo si es y ≥ z.

Definición 4.4.:

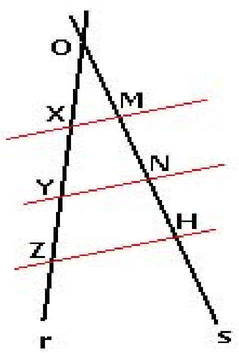
Dadas las proporcionalidades p_1 y p_2, se define la proporcionalidad producto como la aplicación:

$$\forall x \in \sum, (p_1.p_2)(x) = p_1[p_2(x)]$$

Teorema 4.3.:

Si son p_1 y p_2 proporcionalidades de razones respectivas a/b y c/d, entonces $p_1.p_2$ es otra proporcionalidad de razón $\frac{z}{x}$, siendo $z = p_1(y)$, $y = p_2(x)$.

Demostración:



Sea p_1 con razón asociada a/b = z/y.

Sea p_2 con razón asociada c/d = y/x.

Consideremos la 2-Referencia de Thales O(r,s) con puntos X, Y, Z en la recta r, y M, N, H en la recta s, siendo:

$$OM \in m, ON \in n, OH \in h$$
$$OX \in x, OY \in h, OZ \in z$$

Se tiene:

$$p_2(m) = \frac{y}{x}(m) = n$$

$$p_1(n) = \frac{z}{y}(n) = h$$

De lo cual, se tiene: $h = \frac{z}{y}(n) = p_1(n) = p_1[p_2(m)] = p_1.p_2(m)$

Y, por otra parte, de la figura: $h = \frac{z}{x}(m)$

Por lo cual, al identificar: $p_1.p_2(m) = \frac{z}{x}(m), \forall m \in \sum$

Teorema 4.4.:

$(Ra, +, .)$ es un semicuerpo conmutativo.

Demostración:

Podemos definir, en virtud del anterior teorema, el producto de las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ a las que corresponden las proporcionalidades respectivas $p_2(x) = y,\ p_1(y) = z$, como la razón asociada a la proporcionalidad producto, o sea, de razón z/x, es decir:

$$\frac{c}{d}.\frac{a}{b} = \frac{z}{x}, \text{ o bien: } \frac{z}{y}.\frac{y}{x} = \frac{z}{x} \qquad [*]$$

Veamos las propiedades:

- Propiedad uniforme:

La razón $\frac{z}{y}.\frac{y}{x} = \frac{z}{x}$ no depende del segmento *x* elegido y los segmentos *y* y *z* quedan automáticamente determinado por *x*, ya que se trata de la razón de la proporcionalidad producto, que es única.

- Propiedad asociativa:

Por ser asociativa la composición de aplicaciones, y siendo en definitiva el producto de proporcionalidades una composición, se deduce la asociatividad del producto de proporcionalidades y, por consiguiente, del producto de razones.

- Propiedad conmutativa:

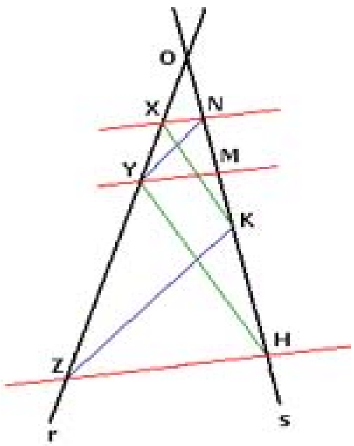
Sean las razones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ y sean $\frac{a}{b} = \frac{y}{x},\ \frac{c}{d} = \frac{z}{y}$.

Por una parte, por [*] se cumple que: $\frac{c}{d}.\frac{a}{b} = \frac{z}{y}.\frac{y}{x} = \frac{z}{x}$

Por otra parte, vamos a ver que tomando una 2-referencia de Thales también se cumple que

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{y}{x}.\frac{z}{y}=\frac{z}{x}$$

con lo cual quedaría probada la propiedad conmutativa.



Sea la 2-referencia de Thales O(r,s) de la figura, en donde es

$$OX\in x, OY\in y, OZ\in z, OM\in m, ON\in n, OH\in h, OK\in k$$

se tiene:

$$\frac{z}{y}(n)=k\Rightarrow\frac{z}{y}=\frac{k}{n}\Rightarrow\frac{z}{k}=\frac{y}{n}\Rightarrow ZK\|YN$$

$$\frac{z}{x}(n)=h\Rightarrow\frac{z}{x}=\frac{h}{n}\Rightarrow\frac{z}{h}=\frac{x}{n}\Rightarrow ZH\|XN$$

Por el Axioma de Pappus:

$$\left.\begin{matrix}ZK\|YN\\ZH\|XN\end{matrix}\right\}\Rightarrow XK\|YH\Rightarrow\frac{x}{k}=\frac{y}{h}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{h}{k}\Rightarrow\frac{y}{x}(k)=h\Rightarrow\frac{y}{x}\frac{z}{y}(n)=h\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y}{x}.\frac{z}{y}(n)=\frac{z}{x}(n)\Rightarrow\frac{y}{x}.\frac{z}{y}=\frac{z}{x}$$

- Propiedad de elemento neutro (unidad):

Obviamente es $\forall x\in\sum,\quad \frac{x}{x}=1_{R_a}$

- Propiedad de elemento simétrico (inverso):

Teniendo en cuenta la igualdad $\frac{z}{y}.\frac{y}{x}=\frac{z}{x}$, si es *x,y≠0*, se tiene que $\frac{x}{y}.\frac{y}{x}=\frac{x}{x}=1_{R_a}$.

- Propiedad distributiva con respecto a la suma:

Consideremos las razones $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}$. Sabemos que existen segmentos generales x e y tales que $\frac{c}{d}=\frac{x}{a},\ \frac{e}{f}=\frac{y}{a}$, por lo cual, tenemos:

$$\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right).\frac{a}{b}=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{a}\right).\frac{a}{b}=\frac{x+y}{a}.\frac{a}{b}=\frac{x+y}{b}=\frac{x}{b}+\frac{y}{b}=\frac{x}{a}.\frac{a}{b}+\frac{y}{a}.\frac{a}{b}$$

Por tanto:

$$\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right).\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.\frac{a}{b}+\frac{e}{f}.\frac{a}{b}$$

En definitiva, $(R_a,+,.)$ es un semicuerpo conmutativo.

El conjunto infinito de las razones de segmentos es, pues, un semicuerpo conmutativo, no siendo un cuerpo porque la suma de razones no tiene la propiedad de elemento simétrico (opuesto). Para que tuviera estructura de cuerpo conmutativo sería preciso definir el concepto de orientación de razones, que mostramos a continuación.

Definición 4.5.:

Dado el semicuerpo R_a de las razones de segmentos generales absolutos del plano, definimos en $R_a x R_a$ la relación S por la condición:

$$\forall\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right),\left(\frac{a'}{b'},\frac{c'}{d'}\right)\in R_a x R_a,\ \left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)S\left(\frac{a'}{b'},\frac{c'}{d'}\right)\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{c'}{d'}=\frac{c}{d}+\frac{a'}{b'}$$

Teorema 4.5.:

La relación S es de equivalencia.

Demostración:

Trivial.

Llamaremos $R_{ao}=\frac{R_a x R_a}{S}$ al conjunto cociente por esta relación de equivalencia, es decir, al conjunto de los pares de razones relacionadas entre sí, que llamaremos razones orientadas de segmentos.

Teorema 4.6.:

El conjunto de las razones orientadas de segmentos, R_{ao}, dotado de la suma y multiplicación de razones antes definidas, es un cuerpo conmutativo.

Demostración:

Es trivial probar que se trata de cuerpo conmutativo si definimos las dos operaciones de la estructura por:

Suma de razones orientadas:

$$\left(\frac{a_1}{a_2},\frac{b_1}{b_2}\right)+\left(\frac{a_1^{'}}{a_2^{'}},\frac{b_1^{'}}{b_2^{'}}\right)=\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1^{'}}{a_2^{'}},\frac{b_1}{b_2}+\frac{b_1^{'}}{b_2^{'}}\right)$$

Producto de razones orientadas:

$$\left(\frac{a_1}{a_2},\frac{b_1}{b_2}\right)+\left(\frac{a_1^{'}}{a_2^{'}},\frac{b_1^{'}}{b_2^{'}}\right)=\left(\frac{a_1}{a_2}.\frac{a_1^{'}}{a_2^{'}}+\frac{b_1}{b_2}.\frac{b_1^{'}}{b_2^{'}},\frac{a_1}{a_2}.\frac{b_1^{'}}{b_2^{'}}+\frac{b_1}{b_2}.\frac{a_1^{'}}{a_2^{'}}\right)$$

En este cuerpo se tiene como elemento nulo: $\left(\frac{a}{b},\frac{a}{b}\right)=0$

Se tienen las clases positivas y negativas del cuerpo R_{ao} :

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\Rightarrow\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d},0\right)S\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)$$

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\left(0,\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)S\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)$$

Por tanto, cada uno de los elementos del cuerpo de las razones orientadas de segmentos quedan representados por solamente una de las siguientes expresiones

$$\left(\frac{x}{y},0\right),\quad 0,\quad \left(0,\frac{x}{y}\right)$$

La clase $\left(\frac{x}{y},0\right)$ podemos denominarla *clase de las razones positivas de segmentos orientados.*

Asimismo, $\left(0,\frac{x}{y}\right)$ es la *clase de las razones negativas de segmentos orientados.*

Trivialmente se prueba que el conjunto de las razones positivas es una clase positiva del cuerpo, por lo que se trata, además de un cuerpo ordenado.

5. Bibliografía:

ABELLANAS, Pedro, "Elementos de Matemáticas". Ediciones Romo. Madrid, 1969
HILBERT, David, "Les Fondements de la Géometrie". Editorial Dunod. París, 1971
MOISE, Edwin E., "Elementos de Geometría Superior". CECSA Ediciones, 1968
PUIG ADAM, Pedro, "Geometría Métrica". Biblioteca Matemática, Madrid, 1958
SEVERI, Francesco, "Elementos de Geometría". Editorial Labor, 1952