# Acerca de los retículos de Boole

## 1. Retículos. De orden y algebraicos.

Un supsemirretículo es un conjunto ordenado $(A,\leq)$ en el que todo par de elementos admite supremo (mayorante mínimo): $\forall a,b\in A, \exists \sup\{a,b\}=a\vee b$

Un infsemirretículo es un conjunto ordenado $(A,\leq)$ en el que todo par de elementos admite ínfimo (minorante máximo): $\forall a,b\in A, \exists \inf\{a,b\}=a\wedge b$

Se llama *retículo de orden* a un conjunto ordenado $(A,\leq)$ que es supsemirretículo y también infsemirretículo En un retículo de orden, por tanto, todo par de elementos admite supremo y también admite ínfimo, lo que nos indica que también todo subconjunto finito admite tanto supremo como ínfimo.

Dado un retículo de orden $(A,\leq)$ y un subconjunto S de A, con el mismo orden inducido por el retículo, $(S,\leq/S)$, diremos que $(S,\leq/S)$ es subretículo del retículo $(A,\leq)$ si y solo si se verifica que, para dos elementos cualesquiera de A, el ínfimo y el supremo en A son respectivamente el ínfimo y el supremo en S:

$$\forall a,b\in A, \inf_A\{a,b\}=\inf_S\{a,b\}, \sup_A\{a,b\}=\sup_S\{a,b\}$$

Un *retículo algebraico* $(A,*,*')$ es un conjunto A dotado de dos leyes de composición interna, * y *′, que tienen las propiedades siguientes:

a) Son idempotentes: $\forall x\in A, x*x=x, x*'x=x$

b) Son conmutativas: $\forall x,y\in A, x*y=y*x, x*'y=y*'x$

c) Son asociativas: $\forall x,y,z\in A, (x*y)*z=x*(y*z), (x*'y)*'z=x*'(y*'z)$

d) Propiedad de absorción: $\forall x,y\in A, (x*y)*'x=x, (x*'y)*x=x$

Ambos, retículo de orden y retículo algebraico, son conceptos equivalentes. Esto es, todo retículo de orden es también un retículo algebraico, y, recíprocamente, todo retículo algebraico es también un retículo de orden. Para ver el razonamiento general que prueba esta equivalencia, podemos acceder al artículo de esta misma web, "La idea de retículo algebraico y de retículo de orden. Equivalencia" (http://casanchi.com/mat/irreticulo01.pdf)

En base a esta equivalencia, cuando hablamos de un retículo, podemos representarlo tanto mediante la relación de orden $(A,\leq)$, como mediante las dos leyes internas que le definen como retículo algebraico $(A,*,*')$.

## 2. Retículos distributivos.

Un retículo algebraico distributivo es un retículo algebraico en el que las dos leyes de composición internas son distributivas la una con respecto de la otra.

Consideremos un retículo $(A,\le)$, en el que las dos leyes internas de su estructura algebraica podemos representarlas por $\vee \equiv \sup, \wedge \equiv \acute{\imath}nf$ . Se verifica que:

a) Son idempotentes: $\forall x \in A, x \vee x = x, x \wedge x = x$

b) Son conmutativas: $\forall x, y \in A, x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$

c) Son asociativas: $\forall x, y, z \in A, (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

d) Propiedad de absorción: $\forall x, y \in A, (x \vee y) \wedge x = x, (x \wedge y) \vee x = x$

Un retículo $(A,\le)$ es *modular* si se verifica que $x \le z \to x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

Un retículo $(A,\le)$ es *distributivo* si se cumple que $\forall x, y, z \in A$ :

$$\begin{cases} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{cases}$$

En un retículo distributivo, en definitiva, se cumple que ambas leyes internas cumplen las mismas propiedades, esto es, son equivalentes. El retículo distributivo puede ser, por tanto, caracterizado por una sola de ellas.

Teorema 2.1: Todo retículo distributivo es modular.
Demostr.: como $x \le z \to x \vee z = z$ , se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \vee z = z \end{array}\right\} \to x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

Teorema 2.2: En todo retículo distributivo se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge y = x \wedge z \\ x \vee y = x \vee z \end{array}\right\} \to y = z$$

Demostr.:

$$\left.\begin{array}{l} y = y \vee (x \wedge y) = y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z) \\ z = z \vee (x \wedge z) = z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge (z \vee y) = (y \vee x) \wedge (y \vee z) \end{array}\right\} \to y = z$$

## 3. Retículos complementarios.

Dado un retículo $(A,\le)$ con mínimo $z$ y máximo $u$ , se llama complemento del elemento $x \in A$ a todo elemento $x' \in A$ que verifique

$$\begin{cases} x \wedge x' = z \\ x \vee x' = u \end{cases}$$

Se llama *retículo complementado* a un retículo $(A,\le)$ con mínimo y máximo, tal que todo elemento $x \in A$ tiene al menos un complemento $x' \in A$ .

Teorema 3.1: En todo retículo distributivo $(A,\leq)$, el complemento de un elemento $x \in A$, si existe, es único.
Demostr.:
Si hubieran dos complementos, $x' \in A$ y $x'' \in A$, del mismo elemento $x \in A$, entonces, aplicando el teorema 2.2:

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge x' = x \wedge x'' = z \\ x \vee x' = x \vee x'' = u \end{array}\right\} \rightarrow x' = x''$$

4. **Retículos de Boole.**

Se denomina *retículo de Boole* a un retículo $(A,\leq)$ distributivo y complementado.

Se define asimismo un *álgebra de Boole* como una 5-pla $(A,\mathrm{T},\Omega,z,u)$, donde:

1) $A$ es un conjunto.
2) $\mathrm{T}$ y $\Omega$ son dos leyes de composición interna en $A$ que cumplen las propiedades de idempotencia, conmutatividad, asociatividad, absorción y distributividad.
3) $z$ y $u$ son dos elementos de $A$, denominados: $z$ *elemento nulo* y $u$ *elemento universal*, tales que
$\forall x \in A, \exists x' \in A / \left(x\mathrm{T}x' = z, x\Omega x' = u\right) \wedge \left(x\mathrm{T}z = z, x\Omega z = x\right) \wedge \left(x\mathrm{T}u = x, x\Omega u = u\right)$

Veamos en el siguiente teorema cómo resultan ser equivalentes el retículo de Boole y el álgebra de Boole.

Teorema 4.1:
1) Si es $(A,\leq)$ un retículo de Boole, entonces, si es $z$ el mínimo y $u$ el máximo de $(A,\leq)$, se tiene que la 5-pla $(A,\wedge,\vee,z,u)$ es un álgebra de Boole, cuyas operaciones internas son $\Gamma \equiv \wedge, \Omega \equiv \vee$.
2) Si es $(A,\mathrm{T},\Omega,z,u)$ un álgebra de Boole, entonces el conjunto ordenado $(A,\leq)$, donde es "$\leq$" la relación definida por $x \leq y \leftrightarrow x\Omega y = y,\ x\Gamma y = x$, es un retículo de Boole.

Demostr.:
1) Si el par $(A,\leq)$ es un retículo de orden, entonces la terna $(A,*,*')$ en donde se ha hecho $* = \wedge = \text{ínfimo}$, $*' = \vee = \text{supremo}$, es un retículo algebraico, pues se verifica trivialmente, teniendo en cuenta que es $x \vee y = \text{supremo del par } \{x,y\}$, y que es $x \wedge y = \text{ínfimo del par } \{x,y\}$:

1. $\forall x \in A, x \vee x = x,\ x \wedge x = x$ (Propiedad de Idempotencia)
2. $\forall x,y \in A, x \vee y = y \vee x,\ x \wedge y = y \wedge x$ (Propiedad Conmutativa)
3. $\forall x,y,z \in A, (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ (Propiedad Asociativa)
4. $\forall x,y \in A, (x \vee y) \wedge x = x,\ (x \wedge y) \vee x = x$ (Propiedad de Absorción)

como también se verifica $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ será un retículo algebraico distributivo. Es inmediato que también se verifica la

propiedad del elemento nulo y del elemento universal, tomando como elemento x’ al complementario de x en el conjunto A.
2) Veamos que se verifican las propiedades de la relación de orden:
1. Propiedad reflexiva:
$\forall x \in A, x\Omega x = x \to x \leq x$
2. Propiedad antisimétrica:
$$\left.\begin{matrix} x \leq y \\ y \leq x \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x\Gamma y = x \\ y\Gamma x = y \end{matrix}\right\}, \ (x \leq y) \wedge (y \leq x) \to \left(x\Gamma y = y\Gamma x\right) \to x = y$$
3. Propiedad transitiva:
$$\left.\begin{matrix} x \leq y \\ y \leq z \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x\Gamma y = x \\ y\Gamma z = y \end{matrix}\right\} \to x\Gamma z = (x\Gamma y)\Gamma z = x\Gamma(y\Gamma z) = x\Gamma y = x \to x \leq z$$
Veamos también que para todo par de elementos de A existe el ínfimo y también existe el supremo:
Puesto que
$x\Omega y = y \to x \leq y, \ x\Gamma y = x \to x \leq y$
se tiene:
$x\Omega(x\Omega y) = (x\Omega x)\Omega y = x\Omega y \to x \leq x\Omega y$
$y\Omega(x\Omega y) = y\Omega(y\Omega x) = (y\Omega y)\Omega x = y\Omega x = x\Omega y \to y \leq x\Omega y$
Es decir:
$$\left.\begin{matrix} x \leq x\Omega y \\ y \leq x\Omega y \end{matrix}\right\} \to x\Omega y = \sup r\{x, y\}$$
Análogamente:
$(x\Gamma y)\Gamma x = (y\Gamma x)\Gamma x = y\Gamma(x\Gamma x) = y\Gamma x \to x\Gamma y \leq x$
$(x\Gamma y)\Gamma y = x\Gamma(y\Gamma y) = x\Gamma y \to x\Gamma y \leq y$
Es decir:
$$\left.\begin{matrix} x\Gamma y \leq x \\ x\Gamma y \leq y \end{matrix}\right\} \to x\Gamma y = \inf\{x, y\}$$
Así, pues, es $(A, \leq)$ un retículo de orden distributivo, en el que se observa que $z$ es el mínimo, $u$ es el máximo y $x'$ es el complementario de $x$ en $A$. Es un retículo de Boole.

Teorema 4.2:
Si en un retículo de Boole $(A, \leq)$ llamamos $x'$ al complementario del elemento $x \in A$, y siendo $\wedge = ínfimo$, $\vee = \sup remo$, se verifican las expresiones siguientes (leyes de De Morgan):

$$1) \ \left(x \wedge y\right)' = x' \vee y', \quad 2) \ \left(x \vee y\right)' = x' \wedge y'$$

Demostración:
1) Veamos la prueba de la primera ley:
a) $\left(x \wedge y\right) \wedge \left(x' \vee y'\right) = \left(y \wedge x\right) \wedge \left(x' \vee y'\right) = \left[\left(y \wedge x\right) \wedge x'\right] \vee \left[\left(y \wedge x\right) \wedge y'\right] =$
$= \left[y \wedge \left(x \wedge x'\right)\right] \vee \left[\left(x \wedge y\right) \wedge y'\right] = \left[y \wedge \left(x \wedge x'\right)\right] \vee \left[x \wedge \left(y \wedge y'\right)\right] =$
$= \left(y \wedge z\right) \vee \left(x \wedge z\right) = z \vee z = z$
por tanto: $\left(x \wedge y\right) \wedge \left(x' \vee y'\right) = z$

b) $\left(x\wedge y\right)\vee\left(x'\vee y'\right)=\left(x'\vee y'\right)\vee\left(x\wedge y\right)=\left[\left(x'\vee y'\right)\vee x\right]\wedge\left[\left(x'\vee y'\right)\vee y\right]=$

$=\left[\left(y'\vee x'\right)\vee x\right]\wedge\left[\left(x'\vee y'\right)\vee y\right]=\left[y'\vee\left(x'\vee x\right)\right]\wedge\left[x'\vee\left(y'\vee y\right)\right]=$

$=(y'\vee u)\wedge(x'\vee u)=u\wedge u=u$

por tanto: $\left(x\wedge y\right)\vee\left(x'\vee y'\right)=u$

En definitiva:

$$\left.\begin{array}{l}\left(x\wedge y\right)\wedge\left(x'\vee y'\right)=z\\ \left(x\wedge y\right)\vee\left(x'\vee y'\right)=u\end{array}\right\}\rightarrow x'\vee y'=\left(x\wedge y\right)'$$

2) Probemos de forma análoga la segunda:

a) $\left(x\vee y\right)\wedge\left(x'\wedge y'\right)=\left(x'\wedge y'\right)\wedge\left(y\vee x\right)=\left[\left(x'\wedge y'\right)\wedge y\right]\vee\left[\left(x'\wedge y'\right)\wedge x\right]=$

$=\left[x'\wedge\left(y'\wedge y\right)\right]\vee\left[y'\wedge\left(x'\wedge x\right)\right]=\left[x'\wedge z\right]\vee\left[y'\wedge z\right]=z\vee z=z$

por tanto: $\left(x\vee y\right)\wedge\left(x'\wedge y'\right)=z$

b) $\left(x\vee y\right)\vee\left(x'\wedge y'\right)=\left[\left(x\vee y\right)\vee x'\right]\wedge\left[\left(x\vee y\right)\vee y'\right]=\left[\left(y\vee x\right)\vee x'\right]\wedge\left[\left(x\vee y\right)\vee y'\right]=$

$=\left[y\vee\left(x\vee x'\right)\right]\wedge\left[x\vee\left(y\vee y'\right)\right]=(y\vee u)\wedge(x\vee u)=u\wedge u=u$

por tanto: $\left(x\vee y\right)\vee\left(x'\wedge y'\right)=u$

En definitiva:

$$\left.\begin{array}{l}\left(x\vee y\right)\wedge\left(x'\wedge y'\right)=z\\ \left(x\vee y\right)\vee\left(x'\wedge y'\right)=u\end{array}\right\}\rightarrow x'\wedge y'=\left(x\vee y\right)'$$

## 5. Anillos de Boole

Un anillo de Boole $(A,+,.)$ es una anillo idempotente con elemento unidad.

Es decir, es una estructura algebraica en la que la ley aditiva, "+", es interna, conmutativa, asociativa, con elemento neutro y con elemento simétrico para cualquier elemento de A, mientras que la ley multiplicativa, ".", es interna, asociativa, distributiva respecto a la ley aditiva, con elemento neutro (unidad) e idempotente.

Teorema 5.1. Todo anillo de Boole $(A,+,.)$ es conmutativo.

Demostr.:

Veamos que la ley multiplicativa, ".", tiene necesariamente la propiedad de ser conmutativa.

$\forall x,y\in A,\ (x+y).(x+y)=(x+y).x+(x+y).y=x.x+y.x+x.y+y.y=$

$=x+y+y.x+x.y=x+y\rightarrow y.x+x.y=0$

Si hacemos $x=y:x.x+x.x=0\rightarrow x+x=2x=0\rightarrow$ $(A,+,.)$ es de característica 2, luego se tiene que $2x.y=0=x.y+y.x\rightarrow x.y=y.x$

Teorema 5.2. Todo retículo de Boole, $(A,\leq)$, puede estructurarse como anillo de Boole $(A,+,.)$.

Demostr.:

Si en el par $(x,y)$ es $x\wedge y$ el elemento mínimo y es $x\vee y$ el elemento máximo, bastará definir las dos operaciones internas como:

$$\forall x, y \in A, \begin{cases} x + y \equiv (x' \wedge y') \vee (x \wedge y) \\ x.y \equiv x \vee y \end{cases}$$

donde $x', y'$ son, respectivamente, los complementarios de $x, y$. Se comprueba trivialmente que se verifican las propiedades que dotan al conjunto A de estructura de anillo de Boole.

Análogamente, se prueba fácilmente que todo anillo de Boole $(A,+,.)$ puede ordenarse como retículo boleano $(A,\leq)$.

## 6. Bibliografía.

**ALBERCA, P., MARTÍN, D.;** "Métodos matemáticos: Álgebra Lineal y Geometría", Ediciones Aljibe, 2001.
**BURGOS, J. De**; "Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana", Ed. McGraw Hill, 2000.
**DUBREIL, P. Y OTROS;** "Lecciones de álgebra moderna". Ed. Paraninfo, 1970
**NAKOS, G., JOYNER, D**.; "Álgebra Lineal con aplicaciones". Ediciones Thomson, 1991
**PEERMINGEAT, N., GLAUDE, D.;** "Algebras de Boole, teoría y métodos de cálculo y aplicaciones". Editorial Vicens Vives, 1993.
**ROSEN, K**.; "Discrete Mathematics and its Applications ". Ed. McGraw-Hill, 1991