La suma de series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{r^n} \quad con \ p \in ¢^{+} \ \ y \ \ |r| > 1$$

Wilfredo Zuleta R. [1]

"La ciencia se compone de errores, que, a su vez, son los pasos hacia la verdad." Julio Verne

A una inmensa cantidad de series se les puede determinar su convergencia, pero una muy pequeña cantidad de ellas se les puede determinar su suma, o sea, es un asunto donde hay mucho por hacer y lo cual es un trabajo generalmente engorroso. Uno de los famosos casos en que una serie convergente de apariencia sencilla como lo es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ requirió un trabajo bastante complejo para determinar que su suma es $\frac{\pi^2}{6}$, y fue gracias a la genialidad de uno de los grandes y más prolíficos matemáticos de todos los tiempos, Leonhard Euler.[2] Al problema de hallar la suma de dicha serie se le ha llamado, el problema de Basilea.[3]

El objetivo de este artículo es deducir una fórmula recursiva para la suma de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{r^n}$ cuando $p \in ¢^{+}$ y $|r| >$, apelando a elementos sencillos como la serie geométrica y el teorema del binomio.

En primer lugar determinamos la convergencia de la mencionada serie usando el criterio de la raíz, veamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^{1/n}\right)}{\left(r^n\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right)^p}{r} = \frac{1}{r} < 1$, de manera que la serie converge.

Ahora veamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{r^n} = \frac{1^p}{r} + \frac{2^p}{r^2} + \frac{3^p}{r^3} + \cdots + \frac{n^p}{r^n} + \frac{(n+1)^p}{r^{n+1}} + \frac{(n+2)^p}{r^{n+2}} + \cdots$$

---

[1] Profesor jubilado del NURR. Universidad De Los Andes. Trujillo-Venezuela. Email:wrzr2001us@hotmail.com

[2] Nació en Basilea, Suiza, 15 de abril de 1707 y murió en San Petersburgo, Rusia, 18 de septiembre de 1783. Fue un matemático y físico suizo. Se trata del principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes de todos los tiempos

[3] El Problema de Basilea es un famoso problema de teoría de números, planteado por primera vez por Pietro Mengoli en el libro "Novae Quadraturae Arithmeticae", y resuelto por Leonhard Euler en 1735, teniendo 28 años de edad, lo que le sirvió para adquirir un alto renombre en la sociedad científica. El estudio de Euler de esta serie y ciertas generalizaciones sirvieron posteriormente para la definición de una de las funciones más importantes en las matemáticas, la función zeta de Riemann: $\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ donde $s \in £ \ \ y \ \ \mathrm{Re}(s) > 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{r^n}=\frac{1}{r}+\underbrace{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}+\cdots+\frac{1}{r^2}}_{2^p\ t\acute{e}rminos}+\underbrace{\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^3}+\cdots+\frac{1}{r^3}}_{3^p\ t\acute{e}rminos}+\underbrace{\frac{1}{r^4}+\frac{1}{r^4}+\cdots+\frac{1}{r^4}}_{4^p\ t\acute{e}rminos}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{r^n}+\frac{1}{r^n}+\cdots+\frac{1}{r^n}}_{n^p\ t\acute{e}rminos}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{r^n}=(1^p-0^p)(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\cdots)+(2^p-1^p)(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\cdots)+(3^p-2^p)(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^4}+\cdots)+\cdots+(n^p-(n-1)^p)(\frac{1}{r^n}+\frac{1}{r^{n+1}}+\cdots)+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{r^n}=\frac{r}{r-1}\left(\frac{(1^p-0^p)}{r}+\frac{(2^p-1^p)}{r^2}+\frac{(3^p-2^p)}{r^3}+\cdots+\frac{(n^p-(n-1)^p)}{r^n}+\cdots\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{r^n}=\frac{r}{r-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^p-(n-1)^p)}{r^n}$$

Usando el teorema del binomio en esta última expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{r^n}=\frac{r}{r-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\frac{\binom{p}{k}n^{p-k}}{r^n}\qquad(1)$$

Como podemos observar la fórmula (1) es recurrente (recursiva), o sea que para calcular el valor de una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{r^n}$ tenemos que conocer los valores de todas las series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}K\frac{n^{p-k}}{r^n}\ \ con\ k=1,2,\cdots,p$.

Veamos unos casos particulares

1. Cuando $p=1\ \ y\ \ r=2$, entonces usando la fórmula (1) tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{2}{2-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}\frac{\binom{1}{k}n^{p-k}}{r^n}=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{1+1}\frac{\binom{1}{1}n^{1-1}}{2^n}\right)=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)=2\Big(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots}_{1}\Big)=2$$

De manera que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2\qquad(2)$$

2. Cuando $p=2\ \ y\ \ r=2$, de nuevo, usando la fórmula (1) y teniendo en cuenta (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{2}{2-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\frac{\binom{2}{k}n^{2-k}}{2^n}=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{1+1}\frac{\binom{2}{1}n^{2-1}}{2^n}+(-1)^{2+1}\frac{\binom{2}{2}n^{2-2}}{2^n}\right)\right)=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right)\right)=$$

$$=2\left(2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}}_{2}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}}_{1}\right)=\left(2(2)-1\right)=2\left(4-1\right)=6$$

Así que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6 \qquad (3)$$

3. Cuando $p=3\;\; y\;\; r=2$, de nuevo, usando la fórmula (1) y teniendo en cuenta (2) y (3) tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}=\frac{2}{2-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\frac{\binom{3}{k}n^{3-k}}{2^n}=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{1+1}\frac{\binom{3}{1}n^{3-1}}{2^n}+(-1)^{2+1}\frac{\binom{3}{2}n^{3-2}}{2^n}+(-1)^{3+1}\frac{\binom{3}{3}n^{3-3}}{2^n}\right)\right)=$$

$$=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{2^n}-\frac{3n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)\right)=$$

$$=2\left(3\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}}_{6}-3\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}}_{2}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}}_{1}\right)=2((3)(6)-3(2)+1)=2(18-6+1)=26$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}=26 \qquad (4)$$

A partir de estos resultados y utilizando la fórmula (1) el lector puede comprobar que

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}=150$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}=1082$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6}{2^n}=9366$

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}$

e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=\frac{3}{2}$

f. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}=\frac{33}{8}$

g. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}=\frac{e}{(e-1)^2}$

h. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\pi^n}=\frac{\pi}{(\pi-1)^2}$

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{\frac{n}{2}}}=-\frac{2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}$

j. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{\frac{n}{2}}}=\frac{7\sqrt{2}+10}{\sqrt{2}-1}$

k. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=8$

I. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n^2+n+1)+1}{2^n}$ =35

Para el caso en que $p=1 \;\; y \;\; |r|>1$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^n} = \frac{r}{(r-1)^2} \qquad (5)$$

Como ejemplos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{(3-1)^2} = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6^n} = \frac{6}{(6-1)^2} = \frac{6}{25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n} = \frac{7}{(7-1)^2} = \frac{7}{36}$$

La expresión (5) se obtuvo usando reiteradamente la fórmula (1) para $p=1$ y varios valores enteros de r, con $|r|>1$ y observando que las sumas arrojaban un patrón de formación de las respectivas sumas obtenidas.

La fórmula (1) también es válida para $p=1 \;\; y \;\; r \in \text{¢}^{-} \;\; (\mathrm{r}<-1)$

Como ejemplos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n} = \frac{-2}{(-2-1)^2} = -\frac{2}{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n} = \frac{-3}{(-3-1)^2} = -\frac{3}{16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-5)^n} = \frac{-5}{(-5-1)^2} = -\frac{5}{36}$$

De manera que tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^n} = \frac{r}{(r-1)^2} \qquad p=1 \;\; y \;\; |r|>1 \qquad (6)$$

La fórmula (6) nos da la suma de este tipo de series que son de términos positivos (cuando $p=1 \;\; y \;\; r \in \text{¢}^{+} \;\; (\mathrm{r}>1)$) o alternadas en signo (cuando $p=1 \;\; y \;\; r \in \text{¢}^{-} \;\; (\mathrm{r}<-1)$) de una manera muy simple.[4]

Ejemplos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} = \frac{e}{(e-1)^2}$$

---

[4] Las determinación de la sumas reiteradas que nos permitió observar el patrón de formación de éstas, fueron hechas utilizando el programa matemático Maple 2015.1 (Maplesoft. Waterloo Maple Inc. 1981/2015)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\pi^n}=\frac{\pi}{(\pi-1)^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{2}^n}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{r^n}=\frac{r}{(r-1)^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{r^n}=\frac{r(r+1)}{(r-1)^3}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{r^n}=\frac{r(r^2+4r+1)}{(r-1)^4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{r^n}=\frac{r(r^3+11r^2+11r+1)}{(r-1)^5}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{r^n}=\frac{r(r^4+26r^3+66r^2+26r+1)}{(r-1)^6}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6}{r^n}=\frac{r(r^5+57r^4+302r^3+302r^2+57r+1)}{(r-1)^7}$$

Se puede observar que las sumas de las series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{r^n}$ se pueden evaluar por una expresión de la forma

$$\frac{r(r^{p-1}+a_{p-2}r^{p-2}+a_{p-3}r^{p-3}+\cdots+1)}{(r-1)^{p+1}} \quad (7)$$

La expresión (7) tiene la forma

$$\frac{rP_{p-1}(r)}{(r-1)^{p+1}} \quad (8)$$

Donde los coeficientes de $P_{p-1}(r)$ están distribuidos en el siguiente triángulo de números

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc|l}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \leftarrow p=1 \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & \leftarrow p=2 \\
 & & & & & & 1 & & 4 & & 1 & & & & & & & \leftarrow p=3 \\
 & & & & & 1 & & 11 & & 11 & & 1 & & & & & & \leftarrow p=4 \\
 & & & & 1 & & 26 & & 66 & & 26 & & 1 & & & & & \leftarrow p=5 \\
 & & & 1 & & 57 & & 302 & & 302 & & 57 & & 1 & & & & \leftarrow p=6 \\
 & & 1 & & 120 & & 1191 & & 2416 & & 1191 & & 120 & & 1 & & & \leftarrow p=7 \\
 & 1 & & 247 & & 4293 & & 15619 & & 15619 & & 4293 & & 247 & & 1 & & \leftarrow p=8 \\
1 & & 502 & & 14608 & & 88234 & & 156190 & & 88234 & & 14608 & & 502 & & 1 & \leftarrow p=9 \\
. & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
. & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
. & & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Los elementos centrales que están a partir de la tercera fila (en rojo) se calculan multiplicando el valor de p correspondiente a la fila donde se encuentra por el valor del elemento inmediato anterior sobre la diagonal donde éste se encuentra y se le suma este valor del elemento inmediato anterior, por ejemplo

$$
\begin{aligned}
&4 = p\cdot 1 + 1 = 3\cdot 1 + 1\\
&66 = p\cdot 11 + 11 = 5\cdot 11 + 11\\
&2416 = 7\cdot 302 + 302\\
&156190 = p\cdot 15619 + 15619 = 9\cdot 15619 + 15619
\end{aligned}
$$

En cuanto a la determinación de los que están inmediatamente y de manera "paralela" a los lados que contienen los unos tenemos que hallar la separación entre elementos consecutivos que vamos a ordenar como un arreglo de dichos elementos, esto es, $[1,4,11,26,57,120,247,502,\dots]$ y escribimos con otro arreglo las diferencias entre los elementos consecutivos, o sea, $[3,7,15,31,63,127,255,\dots]$ que se obtienen de la siguiente manera: En vista de que la primera diferencia (3), la segunda diferencia se obtiene multiplicando por 2 la diferencia previa y se le suma la unidad, por ejemplo: $7 = 2\cdot 3 + 1$, $15 = 2\cdot 7 + 1$, $31 = 2\cdot 15 + 1, \dots, 255 = 2\cdot 127 + 1$, ahora bien, teniendo las correspondientes diferencias podemos encontrar las deseadas diagonales partiendo de 1 y agregando las correspondientes diferencia. Así que en vista de las simetrías que tienen los elementos en cada fila hemos construido hasta el momento el siguiente triángulo de coeficientes polinomiales, veamos

$$
\begin{array}{cl}
1 & \leftarrow p = 1\\
1 \quad 1 & \leftarrow p = 2\\
1 \quad 4 \quad 1 & \leftarrow p = 3\\
1 \quad 11 \quad 11 \quad 1 & \leftarrow p = 4\\
1 \quad 26 \quad 66 \quad 26 \quad 1 & \leftarrow p = 5\\
1 \quad 57 \quad [\ ] \quad [\ ] \quad 57 \quad 1 & \leftarrow p = 6\\
1 \quad 120 \quad [\ ] \quad 2416 \quad [\ ] \quad 120 \quad 1 & \leftarrow p = 7\\
1 \quad 247 \quad [\ ] \quad [\ ] \quad [\ ] \quad [\ ] \quad 247 \quad 1 & \leftarrow p = 8\\
1 \quad 502 \quad [\ ] \quad [\ ] \quad 156190 \quad [\ ] \quad [\ ] \quad 502 \quad 1 & \leftarrow p = 9\\
. & \\
. & \\
. &
\end{array}
$$

Lo que queda por determinar es lo que se encuentra entre corchetes (color fucsia), pero hasta el momento no he encontrado un patrón de formación de esos elementos que dependan de los valores de p, o sea, de la fila correspondiente donde ellos se encuentran. Así que, le queda a algún lector que lea este artículo conseguir esa expresión en términos de p para determinar esos elementos.