EL MÉTODO DE LAS TRANSFORMACIONES POR CONTRACCIÓN

APLICACIÓN A LA DEMOSTRACIÓN DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES EN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Son muchas las situaciones en la que se nos plantea la necesidad de probar la existencia y unicidad de solución en ecuaciones algebraicas, de tipo trascendente, diferenciales, etc.. La prueba de que la solución existe y que además es única, en cada caso, en cada tipo de problema, exige actuar de forma diferente en general. Sin embargo, una determinada manera de actuación, válida para muchos casos de este tipo, permite englobar en una misma metodología la prueba de existencia y unicidad de la solución en diversos problemas.

El método de las Transformaciones por Contracción es un método de los llamados *de punto fijo* o también *de aproximación sucesiva*, y es la simple aplicación de un teorema básico que se verifica en cualquier espacio métrico completo. En lo que sigue exponemos el teorema básico y lo aplicaremos como ejemplo a ecuaciones diferenciales de primer orden.

0. Los espacios métricos completos:

Un espacio métrico M queda definido por la existencia de una métrica, por una distancia, es decir, por una aplicación d definida de M en M que cumple las tres condiciones:

a) $\forall (x,y) \in M, d(x,y) \geq 0, \quad si\ d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

b) $\forall (x,y) \in M, d(x,y) = d(y,x)$

c) $\forall (x,y,z) \in M, d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Un espacio métrico será completo si en él toda sucesión de Cauchy es convergente, esto es, toda sucesión en la que los términos se acercan entre sí es convergente en M.

1. El Método de las transformaciones por contracción:

Teorema: Si en un espacio métrico y completo, M, existe un operador Δ tal que verifica las dos condiciones siguientes

1) Transforma puntos de M en puntos de M:

$$\Delta : M \to M. \quad \forall x \in M, \Delta x \in M \qquad [1]$$

2) Acerca los puntos imágenes:

$$\forall x, y \in M, d(\Delta x, \Delta y) \leq \phi . d(x,y), \quad 0 \leq \phi \leq 1 \qquad [2]$$

entonces, existirá un único punto fijo $w \in M$ tal que $\Delta w = w$, y que puede calcularse mediante aproximaciones sucesivas, esto es, si la sucesión de M $(w_n) = \{w_0, w_1, ..., w_n, ...\}$ se obtiene aplicando sucesivamente el operador $\Delta w_{n-1} = w_n$, será $\lim w_n = w$.

Demostración:

Puesto que *M* es un espacio métrico, toda sucesión fundamental o de Cauchy es convergente en *M*. Por tanto, bastará probar que la sucesión $(w_n) = \{w_0, w_1, ..., w_n, ...\}$ es sucesión de Cauchy, es decir, bastará probar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon / p, q > N_\varepsilon \Rightarrow d(w_p, w_q) < \varepsilon$$

Se tiene, por tanto, para ϕ<1:

$$\begin{array}{l} d(w_1, w_2) = d(\Delta w_0, \Delta w_1) \leq \phi.(w_0, w_1) \\ d(w_2, w_3) = d(\Delta w_1, \Delta w_2) \leq \phi^2.(w_0, w_1) \\ \quad ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \\ d(w_p, w_{p+1}) = d(\Delta w_{p-1}, \Delta w_p) \leq \phi^p.(w_0, w_1) \\ \quad ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \;\; ... \end{array}$$

y para dos términos cualesquiera de la sucesión, w_p y w_q tendríamos:

$$\begin{array}{l} d(w_p, w_q) = d(w_p, w_{p+r}) \leq d(w_p, w_{p+1}) + d(w_{p+1}, w_{p+2}) + ... + d(w_{p+r-1}, w_{p+r}) = \\ = \left(\phi^p + \phi^{p+1} + ... + \phi^{p+r-1}\right).d(w_0, w_1) \end{array}$$

Por tanto:

$$d(w_p, w_q) = d(w_p, w_{p+r}) \leq \frac{\phi^{p+r} - \phi^p}{\phi - 1}.d(w_0, w_1) \leq \frac{\phi^p}{1 - \phi}.d(w_0, w_1)$$

Es decir, la distancia se hace cada vez menor al aumentar el valor de *p*, por lo cual

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon / p, q > N_\varepsilon \Rightarrow d(w_p, w_q) < \varepsilon$$

Y siendo M un espacio métrico completo, la sucesión dada $(w_n) = \{w_0, w_1, ..., w_n, ...\}$ es convergente en M:

$$\exists w \in R / \lim w_n = w$$

Este límite, por ser único, es el punto fijo de la transformación que define el operador Δ. Es decir, existe un único punto $w \in M$ tal que $\Delta w = w$.

Este teorema nos ofrece en definitiva un método para probar la existencia de un punto fijo, único, que verifica la ecuación Δw=w, método que podemos aplicar en cada tipo de problema definiendo adecuadamente el operador Δ y la métrica del espacio.

2. Una utilización inmediata del método. Probando la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación diferencial de primer orden:

Probemos que si la función f(x,y) es continua y lipschitziana en el dominio

$$D = \{(x,y)/(x_0 - a \le x \le x_0 + a) \wedge (y_0 - b \le y \le y_0 + b) \wedge y_0 = y(x_0)\}$$

entonces la ecuación diferencial y'=f(x,y) tiene en dicho dominio solución única.

Efectivamente:

Para efectuar la demostración, tengamos en cuenta que:

. Si f(x,y) es continua en D también será acotada en D:

$$\exists M \in R / |f(x,y)| \le M, \forall (x,y) \in D$$

. Si f(x,y) es lipschiptziana en D cumple, por definición, que

$$\exists N \in R / |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le N.|y_1 - y_2|, \quad (x,y_1),(x,y_2) \in D$$

. Si existe la integral, la solución de la ecuación diferencial habrá de ser de la forma

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y).dx, \quad y_0 - b \le y \le y_0 + b$$

. La métrica del espacio, es decir, la distancia entre dos valores de y(x), se define en la forma habitual por

$$d(y_1, y_2) = \max |y_1 - y_2|$$

. Para que se cumpla la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial dada debemos comprobar que se verifican las dos condiciones [1] y [2] del teorema que define el método de las transformaciones por contracción, o sea, que para el operador Δ que definamos se cumplirá que:

1) $\forall y \in (y_0 - b, y_0 + b), \ \Delta y \in (y_0 - b, y_0 + b)$
2) $\forall y_1, y_2 \in (y_0 - b, y_0 + b), d(\Delta y_1, \Delta y_2) \le \phi.d(y_1, y_2), \quad 0 < \phi < 1$

Veamos que se cumplen las dos condiciones del teorema, definiendo el operador Δ en la forma:

$$\Delta y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y).dx$$

1) $\forall y \in (y_0 - b, y_0 + b), \ \Delta y \in (y_0 - b, y_0 + b)$:

$$f(x,y) \ cont \ en \ D \Rightarrow f(x,y) \ a\cot \ en \ D \Rightarrow \exists M \in R / |f(x,y)| \le M \ en \ D \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists M \in R / \left| \int_{x_0}^{x} f(x,y).dx \right| \le M.|x - x_0| = M.s_0$, llamando $s_0 = |x - x_0| < a$.

Por tanto, es $\left|\Delta y - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y).dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} M.dx\right| \le M.\left|x - x_0\right| = M.s_0 < b$

Y ha de ser:

$$M.s_0 < b \Rightarrow s_0 < \frac{b}{M} \Rightarrow \begin{matrix} s_0 < a \\ s_0 < \frac{b}{M} \end{matrix} \Rightarrow s_0 < \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \wedge \left|x - x_0\right| = s_0 \Rightarrow x_0 - s_0 \le x \le x_0 + s_0$$

en definitiva:

$\forall y \in \left(y_0 - b, y_0 + b\right),\ \Delta y \in \left(y_0 - b, y_0 + b\right)$, con $x \in \left(x_0 - s_0, x_0 + s_0\right),\ s_0 < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$

Siendo *M* una cota de la función *f(x,y)* en *D*.

2) $\forall y_1, y_2 \in \left(y_0 - b, y_0 + b\right), d(\Delta y_1, \Delta y_2) \le \phi.d(y_1, y_2), \quad 0 < \phi < 1$:

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D,\ d\left(\Delta y_1, \Delta y_2\right) = \max\left|\Delta y_1 - \Delta y_2\right| = \max\left|\int_{x_0}^{x}\left[f(x, y_1) - f(x, y_2)\right].dx\right|$$

y por ser *f(x,y)* lipschitziana en *D*:

$$d\left(\Delta y_1, \Delta y_2\right) = \max\left|\int_{x_0}^{x}\left[f(x, y_1) - f(x, y_2)\right].dx\right| \le N.\max\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_1 - y_2\right|.dx\right| = N\left|x - x_0\right|.\max\left|y_1 - y_2\right| =$$

$$= N.s_0.d(y_1, y_2) = \phi.d(y_1, y_2)$$

Esta segunda condición se verifica eligiendo $\phi = N.s_0 < 1 \Rightarrow s_0 < \frac{1}{N}$.

Por tanto, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

tiene solución única *y(x)*, para $x_0 - s_0 \le x \le x_0 + s_0,\ con\ s_0 < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$, siendo *M* una cota de *f(x,y)* en *D*, y *N* constante de Lipschitz en D.

Se concreta, en definitiva, el siguiente enunciado:

Si es f(x,y) continua y lipschitziana en el intervalo $\left(x_0 - a, x_0 + a\right)$ con valores en el intervalo $\left(y_0 - b, y_0 + b\right)$, entonces, la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ tiene solución, y es además única, en el intervalo $\left(x_0 - s_0, x_0 + s_0\right)$ siendo $s_0 < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$ donde es M una cota de f(x,y) y N la constante de la condición de Lipschitz en el intervalo $\left(x_0 - a, x_0 + a\right)$.

3. Utilización del método para probar la existencia y unicidad de solución en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Probemos que si las funciones $f_i(x,y_1,...,y_n)$ son continuas y lipschitzianas en el dominio

$$D = \{(x, y_1..., y_n)/(x_0 - a \le x \le x_0 + a) \wedge (y_{i0} - b_i \le y_i \le y_{i0} + b_i) \wedge y_{i0} = y_i(x_0), i = 1,...,n\}$$

entonces el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{ll} \dfrac{dy_1}{dx} = & f_1(x, y_1,..., y_n) \\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = & f_n(x, y_1,..., y_n) \end{array}$$

tiene en dicho dominio solución única.

Demostración:

Por ser continuas y lipschitzianas son en D acotadas y cumplen la condición de Lipschitz:

. $\exists M \in R / |f_i(x, y_1,..., y_n| < M,\ i = 1,...,n$

. $\exists N \in R / |f_i(x, u_1,..., u_n) - f_i(x, v_1,..., v_n)| \le N.\sum_{j=1}^{n} |u_j - v_j|$

Consideraremos el espacio E de todas las n-plas $\overline{y} = (y_1,..., y_n)$ donde las componentes son

$$y_i = y_i(x),\ x \in (x_0 - a, x_0 + a) \wedge y_{i0} = y_i(x_0)$$

definiéndose la distancia en este espacio en la forma habitual:

$$\forall \overline{u}, \overline{v} \in E, \overline{u} = (u_1,..., u_n), \overline{v} = (v_1,..., v_n), d(\overline{u}, \overline{v}) = \sum_{j=1}^{n} \max |u_j - v_j|$$

Si existe la integral, la solución de cada una de las ecuaciones del sistema viene dada por

$$y_i = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1,..., y_n).dx,\ i = 1,...,n$$

Hemos de comprobar que se verifican las condiciones [1] y [2] del procedimiento:

$$\begin{array}{lll} 1) & \forall \overline{y} \in D, & \Delta\overline{y} \in D \\ 2) & \forall \overline{u}, \overline{v} \in D, & d(\Delta\overline{u}, \Delta\overline{v}) \le \phi.d(\overline{u}, \overline{v}) \end{array}$$

para lo cual definimos el operador Δ de la forma:

$$\Delta\bar{y} = (\Delta y_1, ..., \Delta y_n)$$

siendo:

$$\Delta y_i = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, ..., y_n).dx, \quad i = 1, ..., n$$

1) La comprobación de la primera condición es inmediata:

$$|\Delta y_i - y_{i0}| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, ..., y_n).dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} M.dx \right| \leq M.|x - x_0| = M.s_0 < b_i \ , \ \ i = 1, ..., n$$

por tanto ha de ser $s_0 = |x - x_0| < a \ \wedge \ s_0 = |x - x_0| < \dfrac{b_i}{M}$

En definitiva, es:

$$\forall y_i \in (y_{0i} - b_i, y_{0i} + b_i), \ \Delta y_i \in (y_{i0} - b_i, y_{i0} + b_i)$$

$$\text{con } x \in (x_0 - s_0, x_0 + s_0), \ s_0 < \min\left(a, \frac{b_i}{M}\right), \quad i = 1, ..., n$$

y para cada n-pla:

$$\bar{y} = (y_1, ..., y_n) = \left(y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1, ..., y_n).dx, ..., y_{n0} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1, ..., y_n).dx \right)$$

$$\forall \bar{y} \in D, \Delta\bar{y} \in D, \text{ con } x \in (x_0 - s_0, x_0 + s_0), \ s_0 < \min\left(a, \frac{b_i}{M}\right), \quad i = 1, ..., n$$

2) La segunda condición:

$$d(\Delta\bar{u}, \Delta\bar{v}) = \sum_{j=1}^{n} \max|u_j - v_j| = \sum_{j=1}^{n} \max\left| \int_{x_0}^{x} f_j(x, u_1, ..., u_n).dx - \int_{x_0}^{x} f_j(x, v_1, ..., v_n).dx \right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \max\left| \int_{x_0}^{x} [f_j(x, u_1, ..., u_n) - f_j(x, v_1, ..., v_n)] dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \max\left| \int_{x_0}^{x} |f_j(x, u_1, ..., u_n) - f_j(x, v_1, ..., v_n)|.dx \right| \leq N.\sum_{j=1}^{n} \max\left| \int_{x_0}^{x} |u_j - v_j|.dx \right| =$$

$$= N.\sum_{j=1}^{n} \max|u_j - v_j||x - x_0| = N.d(\bar{u}, \bar{v}).s_0 = \phi.d(\bar{u}, \bar{v})$$

Para que sea $\phi = N.s_0 < 1$ ha de ser $s_0 < \dfrac{1}{N}$, por lo cual ha de ser $s_0 < \min\left(a, \dfrac{1}{N}\right)$

En definitiva, por tanto, puede enunciarse que

Si son las funciones $f_1(x, y_1, ..., y_n), ..., f_n(x, y_1, ..., y_n)$ continuas y lipschitzianas en el dominio D

$$D = \{(x, y_1 ..., y_n) / (x_0 - a \leq x \leq x_0 + a) \wedge (y_{i0} - b_i \leq y_i \leq y_{i0} + b_i) \wedge y_{i0} = y_i(x_0), i = 1, ..., n\}$$

con constantes de acotación M y de Lipschitz N en D, entonces el sistema dado por

$$\frac{dy_i}{dx} = f(x, y_1, ..., y_n), \quad i = 1, ..., n$$

tiene solución única en el intervalo $(x_0 - s_0, x + s_0)$ siendo $s_0 < \min\left(a, \frac{b_i}{M}, \frac{1}{N}\right)$ para cada uno de los $i = 1, ..., n$

4. Bibliografía:

APÓSTOL, T. M.; Calculus. Edit. Reverté, Barcelona, 1965
AYRES, F.; Ecuaciones Diferenciales. Mc Graw-Hill, 1991
BASS, J.; Curso de Matemáticas. Toray-Masson, 1971
BURKILL, J.C.; Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Dossat, Madrid, 1969
CASTRO, A. de; Complementos de Matemáticas. SAETA, Madrid, 1970
CODDINGTON, E.A.; Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. CECSA, 1968
DIEUDONNE, J.; Fundamentos de Análisis Moderno. Editorial Reverté, Barcelona, 1976
DOU, A.; Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Dossat, Madrid, 1970
ELGOLTZ, L.; Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional. Editorial Mir, Moscu, 1983
NAGLE, R.K. ; SAFF, E.B.; Fundamentos de Ecuaciones diferenciales. Wilmington, Addison-Wesley Iberoamericana.
PONTRIGUIN, L.S.; Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial Mir, Moscu, 1981
PUIG ADAM, P.; Ecuaciones Diferenciales. Biblioteca Matemática.
RODRÍGUEZ VIDAL,R.; Ecuaciones Diferenciales y temas afines. Vicens-Vives. Barcelona, 1972.
SIMMONS, F.; Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas. Mc Graw-Hill, 1993.
ZILL, D.G.; CULLEN M.R.; Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera. México, International Thomson Editores, 2001