LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Es la más conocida y utilizada de las transformadas integrales. Se ha mostrado de una gran utilidad a la hora de resolver multitud e problemas de la ciencia y tecnología, aplicándose de manera efectiva al estudio de tema fundamentales como teoria de vibraciones, circuitos electrónicos, búsqueda de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales, estudio de la conductividad del calor, ecuación de onda, soluciones de problemas de valor de frontera, etc.

0. Introducción:

La idea básica del llamado Cálculo Operativo consiste en establecer una correspondencia funcional o transformación de modo que si a una función *f(x)* dada le corresponde un conjunto *L[f(x)]* de operaciones, o un conjunto de ecuaciones *L[f(x)]=0*, a la función transformada correspondiente *F(s)* le corresponderá el conjunto de operaciones *L[F(s)]* o bien un conjunto de ecuaciones *L[F(s)]=0*. La utilidad de esta correspondencia funcional se manifiesta cuando el conjunto de operaciones, *L[F(s)],* o de ecuaciones transformadas *L[F(s)]=0* es de más sencilla resolución que las operaciones correspondientes *L[f(x)]*, o ecuaciones correspondientes *L[f(x)]=0* en la función original *f(x).*

Pueden ser ideadas, obviamente, múltiples reglas de transformación. En particular han resultado efectivas las llamadas transformadas integrales, por la que se define la función transformada *F(s)* como una integral de la función original *f(x)* multiplicada por alguna función arbitraria de las variables *x* y *s* que se denomina en general *Núcleo de la transformación*:

$$F(s) = \int_a^b K(s,x).f(x).dx$$

En todas las transformadas integrales es el núcleo de la transformación, $K(s,x)$, y, en algún caso, los límites de integración, *a* y *b*, lo que define el tipo de transformada integral.

Son ejemplos de transformadas integrales las siguientes:

a. Transformada de Fourier por senos:

$$F(s) = \int_0^\infty sen(st).f(t).dt$$

b. Transformada de Fourier por cosenos:

$$F(s) = \int_0^\infty \cos(st).f(t).dt$$

c. Transformada de Fourier compleja:

$$F(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{ist}.f(t).dt$$

d. Transformada de Laplace:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}.f(t).dt$$

e. Transformada de Hankel:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t).t.J_n(st).dt$$

($J_n(st)$ es la función de Bessel de órden n)

f. Transformada de Mellin:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t).t^{s-1}.dt$$

1. La transformada integral de Laplace:

Definición 1.1:

Sea *f(t)* una función real definida en el intervalo (-∞, +∞) tal que *f(t)=0* si *t<0*. Se llama *Transformada de Laplace de f(t)* a la función

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}.f(t).dt$$

que también podemos designar por *L(f)*, o por *Lf*.

La variable *s* es un número complejo, *s=a+i.b*, y la transformada *F(s)* está definida para aquellos valores de s en el plano complejo para los cuales converge la integral.

Proposición 1.1:

Si llamamos $\phi_a(t)=e^{-at}.f(t)$, entonces la transformada de Laplace de *f(x)* coincide con la transformada de Fourier compleja de $\phi_a(t)$.

En efecto:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}.f(t).dt=\int_0^{\infty} e^{-(a+bi).t} f(t).dt=\int_0^{\infty} e^{-ibt}.e^{-at}.f(t).dt=\int_0^{\infty} e^{-ibt}.\phi_a(t).dt$$

Proposición 1.2:

Para que exista la transformada de Laplace de una función *f(x)* es condición suficiente que:

a) $f(x)\in R$, en todo intervalo finito.
b) $f(x)$ sea de orden exponencial, esto es, que existan contantes positivas *M, a,* x_o tales que $\left|f(x)\right|\leq M.e^{ax}, \quad \forall x\geq x_o$

En efecto:

Descompongamos la integral que define la transformación:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}f(t).dt=\int_0^{t_0} e^{-st}f(t).dt+\int_{t_0}^{\infty} e^{-st}f(t).dt$$

La primera de ambas integrales existe, puesto que f(x)∈R en todo intervalo finito.

En cuanto a la segunda integral, se tiene que para x>a:

$\left|e^{-st}f(t)\right|=e^{-xt}\left|f(t)\right|\leq e^{-xt}.Me^{at}=M.e^{-(x-a).t}, \quad \forall t\geq t_0$, por tanto:

$$\left|\int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t).dt\right| \leq \int_{t_0}^{\infty} \left|e^{-st} f(t)\right|.dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} \left|f(t)\right|.dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-xt} \left|f(t)\right|.dt \leq \int_{t_0}^{\infty} M.e^{-(x-a).t}.dt \leq$$

$$\leq \int_{0}^{\infty} M.e^{-(x-a).t}.dt = \frac{M}{x-a}$$

En definitiva, $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}.f(t).dt$ converge absolutamente para x>a.

Proposición 1.3:

Si la integral

$$\int_0^\infty e^{-st}.f(t).dt$$

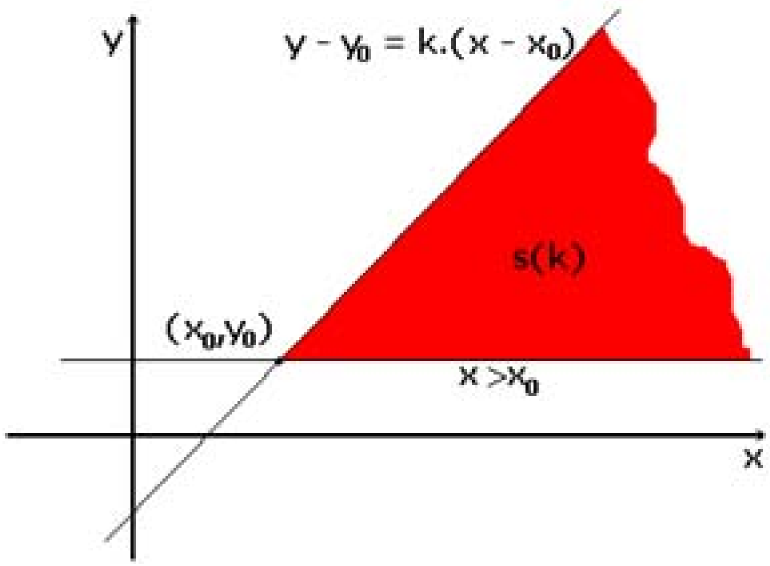
es convergente en $s = s_0 = x_0 + i.y_0$, entonces, si para cualquiera que sea el número real positivo *k* definimos el sector *s(k)* con vértice en s_o como el conjunto

$$s(k) = \left\{ x + iy / x > x_o, \ \left|\frac{y - y_0}{x - x_0}\right| < k \right\}$$

resulta que la integral

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t}.f(t).dt$$

converge uniformemente en *s(k).*



En efecto:

El teorema quedaría probado se demostramos que para todo *s*∈*s(k),* existe algún t_0 tal que si $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ entonces

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t).dt\right| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

Empecemos definiendo $\beta(x) = \int_0^x e^{-s_0 t} f(t).dt - \int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t).dt$, si $x \geq 0$, por lo que es $d\beta(t) = e^{-s_0 t} f(t).dt$, y por tanto: $\int_0^x e^{-s_0 t} f(t).dt = \int_0^x e^{-(s-s_0)t}.d\beta(t)$, siendo esta igualdad válida para todo número complejo *s=x+iy* que tenga $x \geq 0$.

Obviamente, es $\beta(x) \to 0 \quad si \quad x \to \infty$, esto es, para valores de x suficientemente grandes, esta función puede hacerse tan pequeña como se quiera. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, siempre podemos elegir un t_0 tal que para $t \geq t_0$ es $\beta(t) < \varepsilon'$, siendo ε' cualquier número positivo, por muy pequeño que sea, en particular, podemos elegir arbitrariamente

$$\varepsilon' = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{1+\sqrt{1+k^2}}$$

Vamos a probar ahora, por consiguiente, que

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t).dt\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-(s-s_0)t}.d\beta(t)\right| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$, para todo *s∈s(k)*

para ello resolvemos por partes la segunda integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-(s-s_0)t}.d\beta(t) = e^{-(s-s_0).t}\beta(t)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \beta(t).[-(s-s_0)]e^{-(s-s_0).t}.dt =$$

$$= e^{-(s-s_0)t_2}\beta(t_2) - e^{-(s-s_0)t_1}\beta(t_1) + (s-s_0)\int_{t_1}^{t_2} e^{-(s-s_0)t}\beta(t).dt$$

y teniendo en cuenta que cuando *s∈s(k)* es $x > x_0$, se tiene que:

$$\left|e^{-(s-s_0).t}\right| = \left|e^{-[(x-x_0)+(y-y_0)i]}\right| = e^{-(x-x_0).t} \leq 1$$

por lo cual, utilizando esta desigualdad, se puede escribir que

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-(s-s_0)t}.d\beta(t)\right| \leq \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon'|s-s_0|.\int_{t_1}^{t_2} e^{-(x-x_0).t}.dt = 2\varepsilon' + \varepsilon'.\frac{|s-s_0|}{x-x_0}\left[e^{-(x-x_0).t_1} - e^{-(x-x_0).t_2}\right] <$$

$$< 2\varepsilon' + 2\varepsilon'.\frac{|s-s_0|}{|x-x_0|} = 2\varepsilon'\left(1+\frac{|s-s_0|}{|x-x_0|}\right) = 2\varepsilon'\left(1+\sqrt{\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2}}\right) = 2\varepsilon'\left(1+\sqrt{1+\left|\frac{y-y_0}{x-x_0}\right|^2}\right) <$$

$$< 2\varepsilon'(1+\sqrt{1+k^2})$$

y, finalmente, si sustituimos $\varepsilon' = \dfrac{\frac{1}{2}\varepsilon}{1+\sqrt{1+k^2}}$:

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t).dt\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-(s-s_0)t}.d\beta(t)\right| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

por lo que la integral indicada converge uniformemente en el sector *s(k).*

Puesto que todo punto del semiplano $x>x_0$ está situado dentro de algún sector s(k) con vértice en x_0, se puede enunciar el siguiente corolario.

Corolario 1.1:

Si la integral

$$\int_0^\infty e^{-st}.f(t).dt$$

converge para $s = s_0 = x_0 + i.y_0$ también converge para cada $s = x + i.y$ en el semiplano $x>x_0$, convergencia que puede o no ser uniforme en dicho semiplano. En los puntos de la recta $x=x_0$ distintos de s_0 la integral puede no ser convergente.

Definición 1.2:

El ínfimo del conjunto de todos los x_0 tales que

$$\int_0^\infty e^{-st}.f(t).dt$$

converge para $s = s_0 = x_0 + i.y_0$ se llama *abcisa de convergencia* de la integral y se representa por $\sigma(t)$. Esta abcisa podría ser $-\infty$, pero no $+\infty$, pues la función f(t) es de orden exponencial.

El semiplano $x > \sigma(t)$ se llama *semiplano de convergencia* de la integral.

Proposición 1.4:

Sea $\sigma(t)$ la abcisa de convergencia de la integral

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}.f(t).dt$$

Para cada $s = x + i.y$, con $x > \sigma(t)$ existe la derivada *F'(s)* y viene dada por

$$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st}.t.f(t).dt$$

integral que converge uniformemente en todo sector *s(k)* interior al semiplano $x > \sigma(t)$.

La aplicación reiterada de este teorema nos dice que *F(s*) tiene derivadas de cualquier orden y que vienen dadas por la fórmula

$$F^{n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st}.t^n.f(t).dt$$

si *s* pertenece al semiplano de convergencia.

En efecto:

Veremos la demostración en dos partes. En la primera probaremos la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty e^{-st}.t.f(t).dt$$

en el semiplano de convergencia $x > \sigma(t)$, y en la segunda parte probaremos la existencia de la derivada *F'(s)* y su expresión mediante la integral anterior.

a) Convergencia de $\int_0^\infty e^{-st}.t.f(t).dt$:

Consideremos la función $\alpha(t) = \int_0^A e^{-st} f(t).dt - \int_0^\infty e^{-st} f(t).dt$, análoga a la función β(t) definida en la demostración de la proposición 1.3. Se tiene entonces que $d\alpha(t) = e^{-s_0 t} f(t).dt$, y por tanto: $\int_0^A e^{-s_0 t}.t.f(t).dt = \int_0^A e^{-(s-s_0)t}.t.d\alpha(t)$, y resolvemos por partes la segunda integral:

$$\int_0^A e^{-(s-s_0)t}.t.d\alpha(t) = t.e^{-(s-s_0).t}\alpha(t)\Big|_0^A - \int_0^A \alpha(t).\left[e^{-(s-s_0)t} - (s-s_0).e^{-(s-s_0)t}.t\right]dt =$$

$$= A.e^{-(s-s_0)A}\alpha(A) - \int_0^A \alpha(t).e^{-(s-s_0)t}.dt + (s-s_0)\int_0^A t.e^{-(s-s_0)t}\alpha(t)dt$$

Puesto que *α(t)* está acotada, $|\alpha(t)| \le M$, si es *s=x+iy* y *x>x₀*, siempre se puede elegir un *h* tal que $x_0<x_0+h<x$, y, para $t \ge 0$ es

$$\left|e^{-(s-s_0)t}.t.\alpha(t)\right| \le M.t.e^{-(s-s_0)t} \le M.t.e^{-(x-x_0)t} = M.t.e^{-h.t}$$

En definitiva, el integrando de $\int_0^A e^{-(s-s_0)t}.t.d\alpha(t)$ está acotado por $M.t.e^{-ht}$, que tiene límite finito para t tendiendo a infinito, por lo cual, aplicando el criterio M de Weierstrass, resulta ser convergente para $x>x_0$ la integral

$$\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}.t.f(t).dt$$

y, finalmente, puesto que x_0 solamente está sujeto a la condición de que $x_0 > \sigma(t)$, se deduce que la integral antedicha converge para todo *s* del semiplano de convergencia $x > \sigma(t)$. Aplicando la proposición 1.3. anterior la integral converge además uniformemente en todo sector *S(k)* de dicho semiplano.

b) Existencia de la derivada *F'(s):*

Consideremos la descomposición:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t).dt=\int_0^\infty e^{-(x+iy)t}f(t).dt=\int_0^\infty e^{-xt}(\cos(yt)-i.sen(yt)).f(t).dt=$$
$$=\int_0^\infty e^{-xt}\cos(yt).f(t).dt-i\int_0^\infty e^{-xt}sen(yt).f(t).dt=u(x,y)+iv(x,y)$$

donde llamamos:

$$u(x,y)=\int_0^\infty e^{-xt}\cos(yt).f(t).dt \qquad v(x,y)=-\int_0^\infty e^{-xt}sen(yt).f(t).dt$$

derivando parcialmente estas expresiones tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\int_0^\infty t.e^{-xt}\cos(yt).f(t).dt \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\int_0^\infty t.e^{-xt}sen(yt).f(t).dt$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\int_0^\infty t.e^{-xt}sen(yt).f(t).dt \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\int_0^\infty t.e^{-xt}\cos(yt).f(t).dt \qquad [1.4.a]$$

de lo que se deduce que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

por lo cual:

$$F'(s)=\frac{d}{ds}F(s)=\frac{d}{ds}F(x+iy)=\frac{d}{dx}\left[u(x,y)+iv(x,y)\right].\frac{dx}{ds}$$

y siendo $\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dx}}=\frac{1}{1}=1$ se tendrá que $F'(s)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$, y, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, también es $F'(s)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

Por tanto, sustituyendo las expresiones integrales [1.4.a]:

$$F'(s)=-\int_0^\infty t.e^{-xt}\cos(yt).f(t).dt+i\int_0^\infty t.e^{-xt}sen(yt).f(t).dt=$$
$$=F'(s)=-\left[\int_0^\infty t.e^{-xt}\cos(yt).f(t).dt-i\int_0^\infty t.e^{-xt}sen(yt).f(t).dt\right]=-\int_0^\infty e^{-st}.f(t).dt$$

por tanto, la derivada de la transformada de Laplace existe y es, precisamente, la integral cuya convergencia se ha probado en el parágrafo anterior.

2. Propiedades:

Proposición 2.1 (Propiedad de linealidad):

Si son c_1 y c_2 números reales y son $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones reales tales que sus transformadas de Laplace son $F_1(s)$ y $F_2(s)$, se verifica que la transformada de la combinación lineal de las funciones es la combinación lineal de las transformadas:

$$\left.\begin{array}{c}\forall c_1, c_2 \in R \\ L[f_1(x)] = F_1(s) \\ L[f_2(x)] = F_2(s)\end{array}\right\} \Rightarrow L[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 L[f_1(x)] + c_2 L[f_2(x)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

En efecto:

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = \int_0^\infty e^{-st}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)].dt = c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t).dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t).dt =$$
$$= c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Proposición 2.2 (Primera propiedad de traslación):

Si es $L[f(t)] = F(s)$ entonces también se verifica que $L[e^{at}.f(t)] = F(s-a)$.

En efecto:

$$L[e^{at}.f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}.e^{at} f(t).dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t).dt = F(s-a)$$

Proposición 2.3. (Segunda propiedad de traslación):

Si es $L[f(t)] = F(s)$ y es $g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$ entonces $L[g(t)] = e^{-sa}.F(s)$

En efecto:

$$L[g(t)] = \int_0^\infty e^{-st} g(t).dt = \int_0^a e^{-st} g(t).dt + \int_a^\infty e^{-st} g(t).dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a).dt = \int_0^\infty e^{-s(a+u)} f(u).du$$

por tanto:

$$L[g(t)] = e^{-sa} \int_a^\infty e^{-su} f(u).du = e^{-sa} F(s)$$

Proposición 2.4 (Propiedad de cambio de escala):

Si es $L[f(t)] = F(s)$, entonces $L[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

En efecto:

$$L[f(at)] = \int_0^\infty e^{-st} f(at).dt = \int_0^\infty e^{-s\frac{u}{a}} f(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u).du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Proposición 2.5 (Propiedad de transformación de derivadas):

Sea f(t) una función continua en $0 \le t \le r$, de orden exponencial para a *t>r*, y su derivada *f'(t)* al menos continua a tramos. Si es $L[f(t)] = F(s)$, se verifica que $L[f'(t)] = s.F(s) - f(0)$

En efecto:

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t).dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}.f'(t).dt = \lim_{A\to\infty}\left[e^{-st} f(t)\Big|_0^A + s\int_0^A e^{-st} f(t).dt \right] =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[e^{-sa} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t).dt \right] = \lim_{A\to\infty}\left[-f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t).dt \right] =$$

$$= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t).dt = -f(0) + s.F(s)$$

(pues $e^{-sA} f(A) \to 0$, para *s>r*)

Proposición 2.6 ((Propiedad de transformación de derivadas con discontinuidad en el origen):

Si la función f(t) de la propiedad anterior no satisface la continuidad en t=0, pero existe $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$ (aunque no sea igual a *f(0)*) entonces es

$$L[f'(t)] = s.F(s) - f(0^+)$$

En efecto:

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t).dt = \lim_{\substack{A\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_\varepsilon^A e^{-st}.f'(t).dt = \lim_{\substack{A\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}}\left[e^{-st} f(t)\Big|_\varepsilon^A + s\int_\varepsilon^A e^{-st} f(t).dt \right] =$$

$$= \lim_{\substack{A\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \left[e^{-sA} f(A) - e^{-s\varepsilon} f(\varepsilon) + s\int_{\varepsilon}^{A} e^{-st} f(t).dt \right] = e^{-sA} f(A) - e^{-s0^+} f(0^+) + s\int_{\varepsilon}^{A} e^{-st} f(t).dt =$$

$$= -f(0^+) + s\int_{\varepsilon}^{A} e^{-st} f(t).dt = -f(0^+) + s.F(s)$$

Proposición 2.7 (Propiedad de transformación de derivadas con discontinuidad en un punto cualquiera):

Si la función f(t) de las dos últimas propiedades deja de ser continua en *t=a>0* entonces

$$L[f'(t)] = s.F(s) - f(0) - e^{-as}\left[f(a^+) - f(a^-)\right]$$

En efecto:

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t).dt = \lim_{\substack{A\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \left[\int_0^{a-\varepsilon} e^{-st}.f'(t).dt + \int_{a+\varepsilon}^{A} e^{-st}.f'(t).dt \right] =$$

$$= \lim_{\substack{A\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \left[\left[e^{-st}.f(t)\Big|_0^{a-\varepsilon} + s\int_0^{a-\varepsilon} e^{-st}.f(t).dt \right] + \left[e^{-st}.f(t)\Big|_{a+\varepsilon}^{A} + s\int_{a+\varepsilon}^{A} e^{-st}.f(t).dt \right] \right] =$$

$$= e^{-sa} f(a^-) - f(0) + \int_0^{a} e^{-st} f(t).dt - e^{-sa} f(a^+) + s\int_a^{\infty} e^{-st} f(t).dt =$$

$$= -e^{-sa}\left(f(a^+) - f(a^-)\right) - f(0) + s.F(s)$$

Proposición 2.8 (Propiedad de transformación de la n-sima derivada):

Si es $L[f(t)] = F(s)$ y son f(t), f′(t),...,$f^{(n-1)}$(t) continuas para $0 \le t \le N$ y de orden exponencial para t>N, y es asimismo $f^{(n)}$(t) al menos continua a tramos para $0 \le t \le N$, se verifica que

$$L\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - s.f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

En efecto:

Podemos hacer la demostración por inducción:

Para n=0: $L[f(t)] = s^0.F(s) = F(s)$ (por definición)
Para n=1: $L[f'(t)] = s.L[f(t)] - f(0)$ (por propiedad 5ª)

Supongamos la fórmula cierta para el valor *n=k-1* a fin de probar que, entonces, sería también cierta para *n=k*:

$$L\left[f^{(k-1)}(t)\right] = s^{k-1}F(s) - s^{k-2}f(0) - s^{k-3}f'(0) - ... - s.f^{(k-3)}(0) - f^{(k-2)}(0)$$

Veamos que ha de ser cierta para *n=k.* Por la propiedad 5ª se tendrá que:

$L\left[f^{k)}(t)\right] = sL\left[f^{k-1)}(t)\right] - f^{k-1)}(0)$, por lo que al sustituir:

$$L\left[f^{k)}(t)\right] = sL\left[s^{k-1}F(s) - s^{k-2}f(0) - s^{k-3}f'(0) - ... - s.f^{(k-3)}(0) - f^{(k-2)}(0)\right] - f^{k-1)}(0)$$

Por tanto:

$$L\left[f^{(k)}(t)\right] = s^k F(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - ... - s.f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)$$

Proposición 2.9 (Propiedad de transformación de integrales):

Si es $L[f(t)] = F(s)$ entonces $L\left[\int_0^t f(u).du\right] = \frac{1}{s}F(s)$

En efecto:

Sea

$$g(t) = \int_0^t f(u).du \Rightarrow g'(t) = f(t) \quad \wedge \quad g(0) = 0 \Rightarrow L[g'(t)] = s.L[g(t)] - g(0) = sL[g(t)]$$

Entonces: $L[g(t)] = \frac{1}{s}L[g'(t)] = \frac{1}{s}L[f(t)] = \frac{1}{s}F(s) \Rightarrow L\left[\int_0^t f(u).du\right] = \frac{1}{s}F(s)$

Proposición 2.10 (Propiedad de transformación del producto por una potencia de la variable):

Si es $L[f(t)] = F(s)$ entonces $L\left[t^n.f(t)\right] = (-1)^n.\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n.F^{(n)}(s)$

En efecto:

Actuaremos por inducción. La fórmula es cierta para *n=1*:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-st} f(t).dt = -\int_0^{\infty} t.e^{-st} f(t).dt = -L[t.f(t)]$$

Veamos que si suponemos la fórmula cierta para *n = k-1* hemos de concluir que también ha de ser cierta para *n = k:*

a) Para *n=k-1* la suponemos cierta:

$$L[t^{k-1}.f(t)] = (-1)^{k-1}.\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}F(s)$$

b) Veamos para n=k:

$$L[t^k.f(t)] = L[t.t^{k-1}f(t)] = -\frac{d}{ds}L[t^{k-1}f(t)] = -\frac{d}{ds}\left[(-1)^{k-1}.\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}F(s)\right] = (-1)^k.\frac{d^k}{ds^k}F(s)$$

Proposición 2.11 (Propiedad de transformación al dividir por la variable):

Si es $L[f(t)] = F(s)$ entonces $L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(u).du$

En efecto:

Si llamamos $g(t) = f(t)/t \Rightarrow f(t) = t.g(t) \Rightarrow L[f(t)] = L[t.g(t)] = -\frac{d}{ds}L[g(t)]$

Por lo cual: $dL[g(t)] = -F(s).ds \Rightarrow L[g(t)]_{\infty}^{t} = -\int_{\infty}^{s} F(u).du \Rightarrow$

$$\Rightarrow L\left[\frac{f(t)}{t}\right] - L\left[\frac{f(\infty)}{\infty}\right] = \int_s^{\infty} F(u).du \Rightarrow L\left[\frac{f(t)}{t}\right] - 0 = \int_s^{\infty} F(u).du$$

Proposición 2.12 (Propiedad del valor inicial):

Si existen los límites que se indican, entonces se verifica que

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s.F(s)$$

En efecto:

$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t).dt = s.F(s) - f(0)$. Si f'(t) es continua a trozos y de orden exponencial, se tiene que es $\lim_{s \to \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t).dt = 0$. Por tanto:

$$\lim_{s \to \infty} L[f'(t)] = \lim_{s \to \infty} s.F(s) - f(0) = 0 \to \lim_{s \to \infty} s.F(s) - \lim_{t \to 0} f(t) = 0$$

o bien:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s.F(s)$$

Proposición 2.13. (Propiedad del valor final):

Si existen los límites que se indican, entonces se verifica que

$$\lim_{x \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s.F(s)$$

En efecto:

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t).dt = s.F(s) - f(0) \Rightarrow \lim_{s \to 0} \int_0^\infty e^{-st} f'(t).dt = \lim_{s \to 0} s.F(s) - f(0) \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty f'(t).dt = \lim_{t \to \infty} \int_0^t f'(u).du = \lim_{s \to 0} s.F(s) - f(0) \Rightarrow \lim_{t \to \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \to 0} s.F(s) - f(0)$$

y en definitiva: $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s.F(s)$

3. Convolución y transformada inversa:

Definición 3.1:

Se denomina *convolución de las funciones f(x)* y *g(x)* y se representa por *f(x)*g(x)*, a la expresión

$$f(x)*g(x)=\int_0^x f(u).g(x-u).du$$

Proposición 3.1:

Se verifica la propiedad de conmutación $f(x)*g(x)=g(x)*f(x)$

En efecto:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(u).g(t-u).du=-\int_t^0 f(t-v).g(v).dv=\int_0^t f(t-v).g(v).dv=g(t)*f(t)$$

Definición 3.2:

Si $L[f(t)]=F(s)$ entonces f(t) se llama *transformada inversa de Laplace de F(s),* y se expresa por $f(t)=L^{-1}[F(s)]$ donde L^{-1} se llama *operador transformada inversa de Laplace*.

Proposición 3.2 (Teorema de convolución):

Si es $L^{-1}[F(s)]=f(t)$ y $L^{-1}[G(s)]=g(t)$, entonces se verifica que

$$L^{-1}[F(s).G(s)]=\int_0^t f(u).g(t-u).du=f(t)*g(t)$$

En efecto:

Probaremos, equivalentemente, que $L[f*g]=F(s).G(s)$:

$$L[f*g]=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(u).g(t-u).du\right).dt=\int_0^\infty\int_0^t e^{-st}f(u).g(t-u).du.dt=$$

$$=\lim_{D\to\infty}\int_0^D\int_0^t e^{-st}f(u).g(t-u).du.dt=\lim_{D\to\infty}\int_0^D\int_0^{u+v} e^{-s(u+v)}f(u).g(v).du.dv=$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u).g(v).du.dv = \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u).du \right)\left(\int_0^\infty e^{-sv} f(v).dv \right) = F(s).G(s)$$

Proposición 3.3. (Fórmula de inversión):

Sea c un número positivo de modo que para cada $s = x + i.y$, siendo x>c, converge absolutamente la integral

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}.f(t).dt$$

Y sea t un punto que satisface alguna de las siguientes condiciones locales:

c) *f* es de variación acotada en un entorno de *t* $[t-\delta, t+\delta]$.
d) Existen los dos límites *f(t+)* y *f(t-)* y las dos integrales impropias

$$\int_{0+}^{\delta} \frac{f(t+u) - f(t+)}{u}.du \qquad \int_{0+}^{\delta} \frac{f(t-u) - f(t-)}{u}.du$$

son absolutamente convergentes.

Entonces, para cada *a>c* se cumple que

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} e^{((a+iv).T)}.F(a+iv).dv$$

La integral del segundo miembro puede expresarse como una integral de contorno tomada a lo largo de un segmento rectilíneo que une *a-iT* con *a+iT* en cuyo caso escribimos

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \to \infty} \int_{a-iT}^{a+iT} e^{sT}.F(s).ds$$

En ocasiones se utiliza el símbolo $\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}$ como abreviación de $\lim\limits_{T \to \infty} \int_{a-iT}^{a+iT}$

Demostración:

Consideremos la función $g(t) = \begin{cases} e^{-at} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$. Aplicando el Teorema de la Integral de Fourier, se tiene:

$$\frac{g(t+) + g(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u).e^{-iv(t-u)} \right] dv$$

expresando esta relación en función de *f(t):*

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}e^{(a+iv).t}\left[\int_{0}^{\infty}f(u).e^{(a+iv)u}.du\right]dv=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}e^{(a+iv)t}F(a+iv).dv$$

4. Ejemplos:

4.1. Ejemplos de transformadas directas**:**

a) $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

b) $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, .n = 1,2,3,...$

c) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

d) $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$

e) $\mathcal{L}\{senkt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$

f) $\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$

g) $\mathcal{L}\{senhkt\} = \frac{k}{s^2-k^2}$

h) $\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$

4.2. Algunas transformadas inversas**:**

a) $1 = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

b) $t^n = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}, .n = 1,2,3,...$

c) $e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$

d) $senkt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}$

e) $\cos kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}$

f) $senhkt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\}$

g) $\cosh kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\}$

4.3. Transformadas de otras funciones:

a) Logaritmo natural:

$$L[\ln(t)] = -\frac{\ln(s)+\gamma}{s}$$

b) Raíz n-sima:

$$L\left[\sqrt[n]{t}\right] = s^{-\frac{n+1}{n}}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

c) Función de Bessel de primera especie:

$$L[J_n(t)] = \frac{\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)^{-n}}{\sqrt{1+s^2}}$$

d) Función modificada de Bessel de primera especie:

$$L[I_n(t)] = \frac{\left(s+\sqrt{-1+s^2}\right)^{-n}}{\sqrt{-1+s^2}}$$

e) Función error:

$$L[erf(t)] = \frac{e^{s^2/4}\,erfc(s/2)}{s}$$

5. Aplicaciones:

5.1. Enumeración de algunas de las muchas aplicaciones de la transformación:

1. Solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.
2. Tratamiento de la Teoría de Vibraciones.
3. Circuitos electrónicos.
4. Resistencia de materiales.
5. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
6. Solución de ecuaciones integrales especiales.
7. Solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables.
8. Solución de ecuaciones en derivadas parciales.
9. Solución de ecuaciones en diferencias finitas.
10. Solución de ecuaciones integro-diferenciales.
11. Solución de ecuaciones diferenciales en diferencias.
12. Conductividad del calor.
13. Ecuación de onda.
14. Líneas de transmisión.
15. Solución de problemas del tipo de valor de frontera.

5.2. Un ejemplo concreto de aplicación:

Consideremos la ecuación diferencial

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 = f(t)$$

con un conjunto de condiciones de frontera:

$$y(0) = A_1,\ \ y'(0) = A_2,\ \ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = A_n$$

Si aplicamos la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación diferencial, se tiene:

$$a_n L\left[y^{(n)}\right] + a_{n-1} L\left[y^{(n-1)}\right] + \ldots + a_1 L[y] + a_0 = L[f(t)]$$

y siendo $L[y(t)] = Y(s),\ \ L[f(t)] = F(s)$, se tiene, teniendo en cuenta las condiciones de frontera y la transformación de la derivada de cualquier orden (proposición 2.8):

$$G(s).Y(s) = F(s)$$

donde es G(s) un polinomio en s.

Entonces, escribimos $Y(s) = {F(s)}\big/{G(s)}$, por lo que, finalmente, para hallar la solución de la ecuación diferencial dada bastará hallar la transformada inversa de Laplace de *Y(s):*

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{F(s)}{G(s)}\right]$$

6. Bibliografía.

SPIEGEL, M.R. Transformada de Laplace. Mcgraw-Hill.
E. BOYCE Y R. C. DI PRIMA. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la Frontera, Limusa. México. 1998.
COURANT, R. y HILBERT, D., Methods of Mathematical Physics, Vols. 1 y 2; Limusa Wiley.
SMITH, M. G., Laplace Transform Theory; Van Nostrand
SNEDDON, I. N., Fourier Transforms; Mc-Graw-Hill
MURRAY, R. y SPIEGEL, Transformadas de Laplace; Mc-Graw-Hill (Colección Schaum).

Carlos S. CHINEA
casanchi@teleline.es