Tres Problemas que sirvieron de base a la introducción del concepto de Derivada

Ailyn Acosta García[1]

Juan Miguel Valdés Placeres[2]

Introducción

El concepto de derivada, ocupa un lugar posterior, en el ordenamiento de los temas que usualmente se siguen en un curso de cálculo o estudio de las funciones y sus propiedades más importantes; no obstante los problemas que históricamente dieron lugar a su uso y formulación, no hacen que la derivada haya sido utilizada en formas más o menos elaboradas, antes de la formalización y conexión con el límite y la continuidad. Al respecto se afirma "A Newton (1642 - 1727) le debemos el primer intento por desarrollar la teoría de los límites, como base lógica del cálculo diferencial..." [1] y por supuesto que esta afirmación indica, que los límites están en la base de la formalización y práctica con las derivadas.

Para darle introducción al concepto de derivada, lo haremos con tres problemas que fueron la base objetiva, que motivó a los geniales matemáticos del siglo XVII a la introducción de los conceptos de derivada y diferencial de una función.

Uno de los principales, fue el de la determinación de la recta tangente a una curva en un punto de esta. Este problema tiene remotos antecedentes en la Grecia antigua, solo que el criterio utilizado, es para algunas curvas demasiado amplio y restrictivo a la vez, pues se hacía para cada caso particular. En la antigüedad se avanzó poco en esta dirección, pero vale la pena destacar que Arquímedes fue capaz de determinar la recta tangente a varias curvas, en especial, a la hoy llamada "espiral de Arquímedes".

En realidad fue Fermat el iniciador de trabajos fructíferos, relacionados con el trazado de la recta tangente a la curva. En esta época también se distingue el trabajo de otros matemáticos, sin embargo fue el inglés Issac Barrow, el maestro de Newton, quien por primera vez resolvió este problema.

[1] Estudiante de Primer Año de la Carrera de Informática. Universidad de Pinar del Río. Cuba
[2] Profesor del Departamento de Matemática. Universidad de Pinar del Río. Cuba

Desarrollo

La sencilla idea de Barrow se basa en lo siguiente: si denotamos por S a la recta secante en los puntos P y Q de una circunferencia, y si manteniendo el punto Q sobre la circunferencia lo acercamos al punto P, la recta S irá girando alrededor del punto P hasta alcanzar la posición de la recta tangente T. (fig 1)

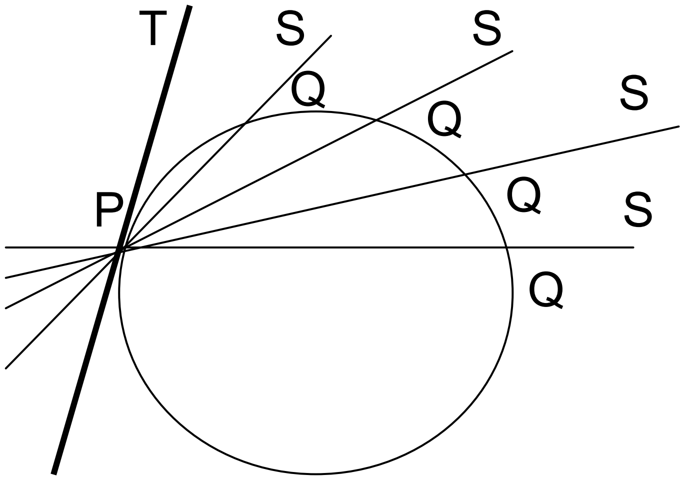


Fig. 1

Lo anteriormente dicho en el lenguaje funcional significa que, dada la curva y = f(x) y dos puntos P y Q, situados en el gráfico de la función, al hacer tender Δx hacia cero, la recta secante tiende a ocupar la posición de la recta tangente (Fig. 2), luego

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

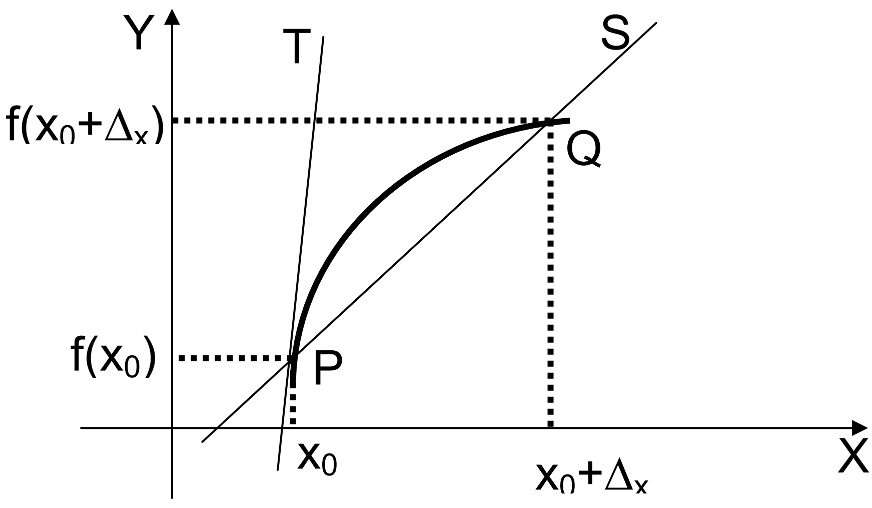


Fig. 2

Ejemplo 1
Hallemos la tangente a la parábola y = x^2 en el punto (3,9). Para conocer el valor de la pendiente de la recta tangente calculemos,

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Para x = 3 se tiene que m = 6. De manera que la ecuación de la recta tangente a la parábola y = x^2 en el punto (3,9) es:

y – 9 = 6(x-3), es decir, y = 6x-9.

Con lo que Barrow había demostrado Newton y Leibniz, desarrollaron diferentes algoritmos y notaciones, y sus aplicaciones en la propia matemática así como en la física principalmente. Una de sus aplicaciones en la física fue encontrarle solución al problema de la definición de la velocidad de una partícula. Ellos explicaron que en un movimiento uniforme, una partícula recorre en intervalos de tiempo iguales el mismo espacio, por lo que la velocidad será constante en este movimiento pues se representa como la razón del incremento de la distancia entre el tiempo:

$$\frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{(t_0+\Delta t) - t_0} = \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = c$$

Esto será posible siempre que el movimiento sea rectilíneo uniforme, de lo contrario el cociente no será constante y en general dependerá tanto del instante t_0 como del intervalo Δt, **este cociente representa un promedio de la variación de s(t) en el intervalo de tiempo de extremos t_0 y t_0 +** Δt, y por eso recibe el nombre de "velocidad media" de la partícula en el intervalo referido.
No obstante, la velocidad media ofrece poca información acerca de las características particulares del movimiento de la partícula, debido a la extensión del intervalo de tiempo Δt por lo que es importante el comportamiento de la velocidad v_m para intervalos de tiempo Δt cada vez más pequeños. De aquí que la velocidad instantánea v de la partícula P se define por:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Ejemplo 2
La ley del movimiento de un punto es s = $5t^2$. Calculemos la velocidad en el instante t = 3 si la longitud es medida en metros y el tiempo en segundos.

A partir de la velocidad instantánea se tiene que

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(t+\Delta t)^2 - 5t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) - 5t^2}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} (10t + \Delta t) = 10t$$

La velocidad en un instante t es igual a 10t; luego en el instante t = 3, la velocidad será v = 30m/s.
El tercero de los problemas propuestos está relacionado con la densidad de masa, de la cual pudieron llegar a la conclusión de que la **densidad de la línea material en un punto s** se define como el límite de la densidad media cuando la longitud Δs de la porción considerada tiende a cero ($\Delta s \neq 0$), esto es

$$\delta = \lim_{\Delta s \to 0} \delta_m = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Phi(s+\Delta s) - \Phi(s)}{\Delta s}$$

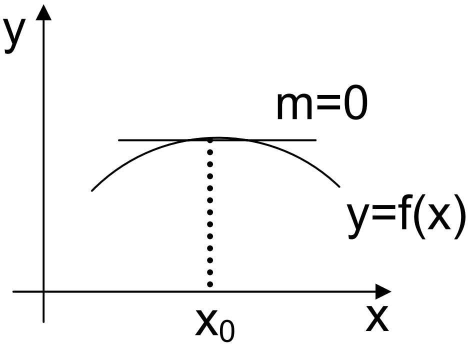
Ejemplo 3
La masa (gramos) de una barra delgada de estructura heterogénea AB, que mide 30cm está distribuida de acuerdo con la ley $m=3s^2+5s$, dada en gramos, donde s es la longitud de un segmento de la barra, medida a partir del punto A. Hallemos la densidad lineal en el punto que dista s = 5cm del punto A.
De la definición de la densidad de una línea material en un punto dado se tiene que

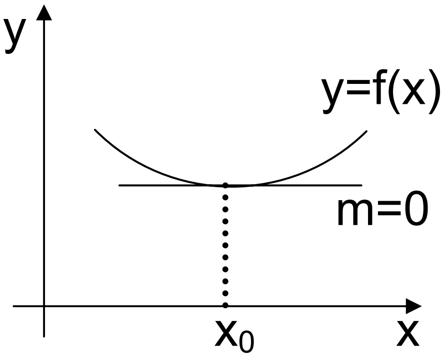
$$\delta = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{3(s+\Delta s)^2 + 5(s+\Delta s) - (3s^2+5s)}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{3(s^2 + 2s\Delta s + (\Delta s)^2) + 5(s+\Delta s) - 3s^2 - 5s}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} (6s + 3\Delta s + 5) = 6s + 5$$

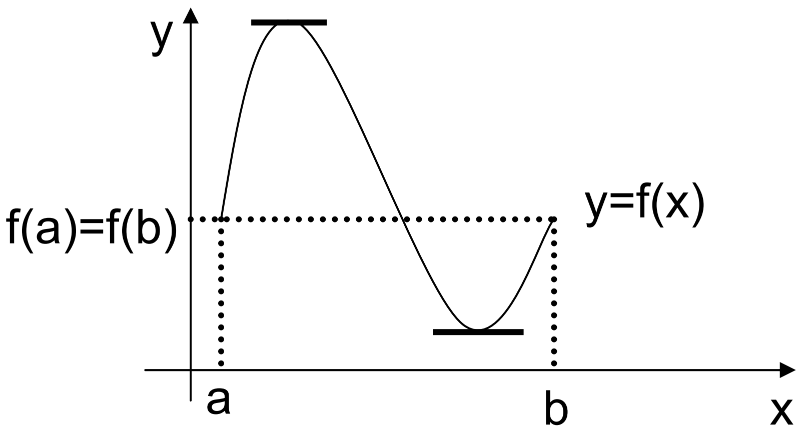
Y para s = 5 se tiene que δ= 35g/cm.
Después de definir el concepto de derivada, alrededor de este surgieron otros teoremas para facilitar el trabajo con funciones a partir de la derivada; estos son los llamados" Teoremas fundamentales del cálculo diferencial".

Teorema de Fermat:
Sea f(x) una función definida en un intervalo abierto que contenga el punto x_0, y supongamos que f(x) es derivable en x_0 y alcanza en este punto su valor máximo o su valor mínimo en dicho intervalo. Entonces $f'(x_0)=0$.
Este teorema nos plantea que en aquellos puntos donde f alcanza valores extremos, la recta tangente a la curva en él, es paralela al eje x.



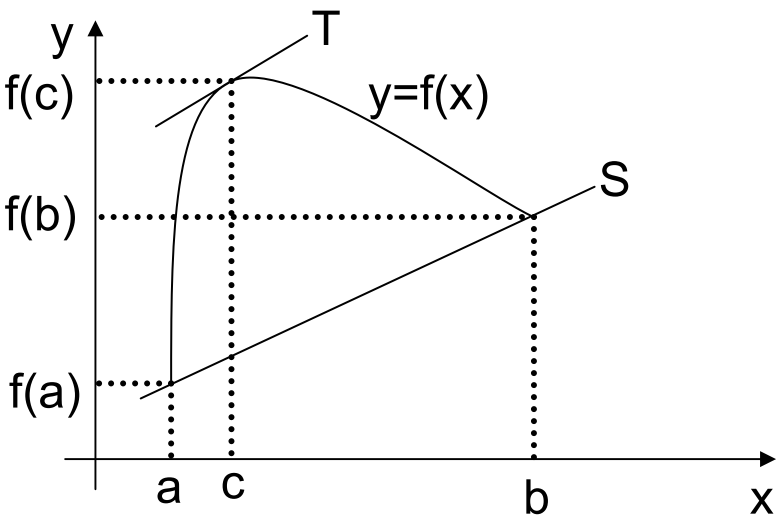


Teorema de Rolle:
Sea f(x) una función continua en el intervalo [a;b] y derivable en (a;b), y tal que f(a)=f(b). Entonces existe al menos un punto c de (a;b) en el cual se tiene que f'(c)=0.



Este teorema plantea que si f(a)=f(b) se puede hallar al menos un punto en el intervalo en que la recta la recta tangente a la curva sea paralela al eje x.
El teorema de Fermat y el de Rolle, se utilizan en la fundamentación y búsqueda de extremos, en la clase de las funciones derivables sobre todos los reales o en un intervalo cualquiera del dominio de derivabilidad. Además estos teoremas permiten fundamentar o demostrar otros teoremas importantes.
Particularmente el teorema de Rolle, garantiza que toda función derivable en su dominio, tiene un extremo (de máximo o mínimo) entre dos ceros consecutivos cualesquiera.

Teorema del valor medio de Lagrange:
Sea f(x) una función continua en el intervalo [a;b] y derivable en (a;b). Entonces existe al menos un punto "c" de (a;b) tal que (f(b)-f(a))/b-a=f'(c).
Este teorema establece que si f es continua y derivable puede hallarse un punto c en dicho intervalo tal que la recta tangente sea paralela a la recta secante S que une a los puntos extremos de la curva: (a; f(a)) y (b; f(b)).
Es sencillo demostrar, utilizando el concepto de derivada de una función, que toda función constante, tiene derivada cero; pero como esta definición es local (por indicar la derivada en un punto) no facilita demostrar el recíproco, o sea el hecho de que si la función dada tiene derivada cero en todo un intervalo entonces es constante y el teorema de Lagrange resuelve este problema.



En ciertas circunstancias, estamos en presencia de elegir una, entre varias, de las soluciones que puede tener una situación dada, tratando de encontrar la más adecuada. Pudiéramos hacer explicaciones similares, utilizando el lenguaje común y obtendríamos diferentes textos; pero si tal situación puede matematizarse, o sea describir sus características en términos de variables que cuantifiquen el hecho; el reto de encontrar la solución puede seguir diferentes caminos algoritmisables, con diferentes herramientas matemáticas entre las que cuenta, el cálculo diferencial. Tal posibilidad nos permite obtener la mejor solución, para los valores posibles de las variables con una garantía, (a diferencia de lo que comúnmente podemos hacer) en términos exactos desde el punto de vista matemático; en términos generales se le llama a estos procesos seguidos a través del cálculo diferencial u otra herramienta, "Métodos de Optimización" y a tales problemas se les llama "Problemas de Optimización".
Aclaremos que en ocasiones las soluciones matemáticas óptimas a problemas reales, no se toman tal cual son; sino que estas representan una indicación importante para tomar la decisión, que se adecue más a la necesidad real. La existencia de extremo está caracterizada por un comportamiento típico, en el conjunto de valores de una función real de variable real y por ende en el gráfico de la misma o en la significación particular que puedan tener las variables, más allá del significado abstracto de número; por tanto además de la ilustración geométrica de la existencia de máximos y mínimos, ya sea local o global, estos muestran el momento óptimo de comportamiento de una variable, dentro de un proceso de dado, que pueden ser geométricos, físicos, económicos, y de las más diversas aplicaciones.
Para ilustrar los procesos de optimización en matemática le daremos solución a algunos problemas propuestos.

Problema 1

-Dividir un número positivo dado a en dos sumandos, de tal forma, que su producto sea el mayor posible.

$$a = b+c;\ a-c = b$$

Luego $f(c) = b*c = (a-c)*c = -c^2+a*c$

Por tanto $f'(c) = [-c^2+a*c]' = -2c+a$ (a es una constante)

Luego igualamos la primera derivada a cero para encontrar el posible valor de extremo.

$$a -2c = 0$$

$$a/2 = c$$

Después hallamos la segunda derivada para saber si ese punto es mínimo o máximo.

$f''(c) = [-2c+a]' = - 2$; $f''(a/2) = - 2$ (porque es una función constante)

Y podemos llegar a la conclusión de que un número se descompone en dos sumandos iguales para que su producto sea máximo.

Problema 2
-Torcer un trozo de alambre de longitud dada l, de manera que forme un rectángulo cuya área sea la mayor posible.

$l= 2(a+b); l/2-a = b$

$A(a) = a*b = a(l/2 - a) = a*l/2 - a^2$

$A'(a) = [a*l/2 - a^2]' = l/2 - 2*a$

Luego hacemos la primera derivada cero

$$l/2 - 2*a = 0 \; ; \; l/4 = a$$

Ya en la segunda derivada

$A''(a) = [l/2 - 2*a]' = - 2$ y por tanto $A''(l/4) = - 2$ lo que indica que es un máximo.

Si el resultado obtenido para "a", lo evaluamos en la ecuación del perímetro nos daremos cuenta de que el rectángulo cuya área sea la mayor posible es el cuadrado, que es un caso particular de rectángulo.

Problema 3
-Hay que hacer una superficie rectangular cercada por tres de sus lados con tela metálica y lindante por el cuarto con una larga pared de piedra. ¿Qué dimensiones será más conveniente dar a la superficie (para que su área sea mayor), si se dispone en total de l m lineales de tela metálica?

$L = 2*a + b; \; l – 2*a = b$

$A(a) = a*b = a(l - 2*a) = l*a - 2*a^2$

$A'(a) = [l*a - 2*a^2]` = l - 4*a$

Luego $l - 4*a = 0; l/4 = a$

$A''(a) = [l - 4*a]' = - 4; A''(l/4) = - 4$

Este resultado nos indica que estamos en presencia de un máximo y además si evaluamos a en la ecuación del perímetro nos queda que $b=l/2$ por tanto el largo es dos veces mayor que el ancho.

Problema 4
-De una hoja de cartón cuadrada, de lado a, hay que hacer una caja rectangular abierta, que tenga la mayor capacidad posible, recortando para ello cuadrados en los ángulos de la hoja y doblando después los salientes de la figura en forma de cruz así obtenida.

a: lado del cuadrado;

b: unidad que se recorta;
$c = a - 2*b$: largo del cuadrado que resulta de recortar las esquinas,

$V(b) = c^2*b = (a - 2*b)^2*b$

$V'(b) = [(a - 2*b)^2*b]' = - 4*b(a - 2*b) + (a-2*b)^2 = (a - 2*b)(- 4*b + (a - 2*b))$
$(a - 2*b)(- 4*b + (a - 2*b)) = 0$

$- 4*b + a - 2*b = 0$ y $a - 2*b = 0$

$a/6 = b$ y $a/2 = b$

$V''(b) = [-4*b(a - 2*b) + (a - 2*b)^2]' = - 4(a-2*b) + 8*b - 4(a - 2*b)$

$V''(a/6) = - 4*a$

Lo que significa que para b = a/6 la caja será de base cuadrada y podremos obtener la capacidad máxima de la misma. Notemos además, que la posible solución b = a/2, se desecha porque significa que la longitud del cuadrado que se recorta de cada esquina, sea la mitad exactamente de la longitud de la hoja de cartón utilizada, lo que claramente, no conduce a elaborar la caja pedida, incluso es prácticamente imposible.

Problema 5

-Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$, son los resultados de mediciones igualmente probables de la magnitud x, su valor más probable será aquel, para el cual la suma de los cuadrados de los errores

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2$$

tenga el valor mínimo (principio de los cuadrados mínimos). Demostrar que le valor más probable de la magnitud x es la media aritmética de los resultados de las mediciones.

$$\sigma(x) = (x - x_1)^2 + (x + x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$$
$$\sigma'(x) = [(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2]' = [(x - x_1)^2]' + [(x - x_2)^2]' + \ldots + [(x - x_n)^2]'$$
$$= 2(x - x_1)\cdot[x - x_1]' + 2(x - x_2)\cdot[x - x_2]' + \ldots + 2(x - x_n)\cdot[x - x_n]' = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \ldots + 2(x - x_n)$$

igualando a cero la primera derivada, se sigue que,

$$2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \ldots + 2(x - x_n) = 0$$
$$2((x - x_1) + (x - x_2) + \ldots + (x - x_n)) = 0$$
$$x - x_1 + x - x_2 + \ldots + x - x_n = 0$$
$$nx - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0$$
$$nx = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$
$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Por otro lado, la segunda derivada será,

$$\sigma''(x) = [2nx - 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)]' = 2n$$
$$\sigma''(\overline{x}) = 2n$$

Podemos observar que la suma de los cuadrados de los errores tendrá valor mínimo en x, pues $\bar{x}$ la segunda derivada es una función constante positiva ya que las $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son valores constantes.

Conclusiones

Destaquemos dos elementos importantes, respecto a los ejemplos y problemas resueltos, que a nuestro modo de ver, pueden aclarar el mensaje didáctico de este trabajo.

Los ejemplos resueltos, son relativamente sencillos, pero muy ilustrativos de cómo opera el concepto de función, a partir de la herramienta que ofrece la definición, y que pudiera llegar a ser aburrido y casi inaccesible, si se hubiesen elegido, casos de funciones más complicadas. No obstante a que se puede señalar incluso, que los ejemplos propuestos, pueden ser abordados con técnicas algebraicas, insistimos en ellos, porque los que realmente requieren del aparato del cálculo diferencial para su solución (donde los tecnicismos algebraicos solos, prácticamente son irrealizables, solo a la manera del danés Christian Huygens, 1629 - 1693), serían de dudosa comprensión, para un lector que se inicia.

El hecho de que realmente sean difíciles de abordar algunos o muchos de los problemas, en que se usa el cálculo diferencial y sus reglas, puede ser aliviado, si se utilizan adecuadamente los Asistentes Matemáticos, al menos en la exploración de los resultados o para cálculo de derivadas y manipulaciones de las ecuaciones, que se derivan de estas y los algoritmos de solución, de los diversos problemas, en que se usa el cálculo diferencial.

Por tanto consideramos, que representa una ilustración resumida, para acercarse al tema del cálculo diferencial y sus aplicaciones.

Bibliografía.

Rodríguez Macías, R y otros. Cálculo Diferencial e Integral, Primera Parte. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba. 1988.

Demidovich, B y otros. Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Editorial Mir, octava edición. Moscú. 1984.

Valdés Castro, C y otros. Análisis Matemático Tomo II. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba. 1983.

Ailyn Acosta García
Estudiante de Informática.
Universidad de Pinar del Río, Cuba

Juan Miguel Valdés Placeres
Profesor del Departamento de Matemáticas.
Universidad de Pinar del Río, Cuba

jmiguel@mat.upr.edu.cu