SOBRE LAS VARIEDADES BIDIMENSIONALES IMMERSAS EN UN ESPACIO EUCLIDIANO ORDINARIO

Por Carmen SÁNCHEZ DÍEZ

1. Subvariedades. Métrica y ecuaciones de descripción:

1.1. Subvariedades y métrica:

Una variedad es un par constituido por un conjunto de variables y una matriz métrica.

Dada la variedad de n dimensiones

$$\sum_n \equiv \left(\{x_r\}_n, \left(h_{pq}\right)_n\right)$$

consideremos una subvariedad de n-1 dimensiones:

$$\Gamma_{n-1} \equiv \left(\{u_k\}_{n-1}, \left(g_{ij}\right)_{n-1}\right)$$

La distancia o intervalo, ds, entre dos puntos infinitamente próximos de la subvariedad puede expresarse tanto en las variables de la subvariedad Γ_{n-1} como en las variables de la variedad $\sum_n$

$$ds^2 = g_{ij}.du_i du_j = h_{pq}.dx_p dx_q$$

La subvariedad Γ_{n-1} viene descrita dentro de la variedad $\sum_n$ por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1,...,u_{n-1}) \\ x_2 &= x_2(u_1,...,u_{n-1}) \\ .... &\quad .... \quad .... \\ ... &\quad .... \quad .... \\ x_n &= x_n(u_1,...,u_{n-1}) \end{aligned}$$

1.2. Equivalencia entre la métrica y las ecuaciones de la variedad:

Conociendo la expresión del intervalo entre dos puntos infinitamente próximos de la variedad, ds, es posible determinar las ecuaciones que describen la subvariedad Γ_{n-1} dentro de la variedad $\sum_n$:

$$g_{ij}dx_i dx_j = h_{pq}du_p du_q \Rightarrow x_r = x_r(u_1,...,u_n),\ \ r = 1,...,n$$

Asimismo, conociendo las ecuaciones que describen la subvariedad Γ_{n-1} dentro de la variedad $\sum_n$ es posible obtener la expresión del intervalo medido en la subvariedad y, por consiguiente, la métrica de la subvariedad:

$$\left.\begin{array}{l} x_r = x_r(u_1,...,u_r) \\ ds^2 = h_{pq}dx_p dx_q \end{array}\right\} \Rightarrow ds^2 = g_{ij}du_i du_j$$

1.3. El caso euclidiano

El caso en el que la variedad de dimensión n es un espacio euclidano nos indicaría que

$$\sum_n \equiv \left(\{x_1,...,x_n\}_n, \left(h_{pq}\right)_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \right)$$

y si se trata de un espacio euclidiano tridimensional, las variedades descritas dentro del mismo serán obviamente bidimensionales:

$$\sum_3 \equiv \left(\{x_1, x_2, x_3\}, \left(h_{pq}\right)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Gamma_2 \equiv \left(\{u_1, u_2\}, \left(g_{ij}\right)_2 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \right)$$

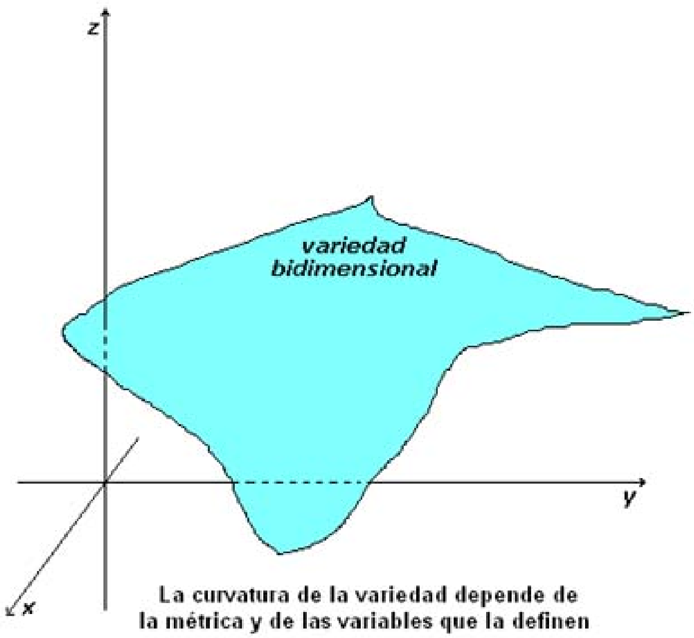
1.4. Las variedades bidimensionales:

Consideremos una variedad bidimensional, esto es, un conjunto de dos variables independientes y una métrica de orden 2:

Variables: (v_1, v_2)

Métrica: $(g_{ij})_2 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$

Donde las variables pueden ser ángulos o longitudes lineales, y la matriz métrica es en general simétrica.



La curvatura de la variedad depende de la métrica y de las variables que la definen

La longitud del intervalo infinitesimal entre dos puntos infinitamente próximos viene dada por

$$ds^2 = g_{ij} dv_i dv_j$$

esa misma longitud infinitesimal, medida en un sistema de coordenadas cartesiano dentro de un espacio euclidiano tridimensional, se expresaría por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

matricialmente se tendría para la variedad:

$$ds^2 = (dv_1, dv_2).\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{pmatrix}$$

y para el espacio euclidiano:

$$ds^2 = (dx, dy, dz).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Puesto que la medida del intervalo es la misma en ambos espacios, se tiene que

$$ds^2 = (dx, dy, dz).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = (dv_1, dv_2).\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{pmatrix}$$

lo cual permitirá obtener un conjunto de tres relaciones que caracterizarán la variedad:

$$\begin{cases} x = f^1_{g_{ij}}(v_1, v_2) \\ y = f^2_{g_{ij}}(v_1, v_2) \\ z = f^3_{g_{ij}}(v_1, v_2) \end{cases}$$

Análogamente, desde el sistema de ecuaciones que describen o caracterizan la variedad bidimensional dentro del espacio euclidiano podremos obtener la métrica correspondiente a la variedad.

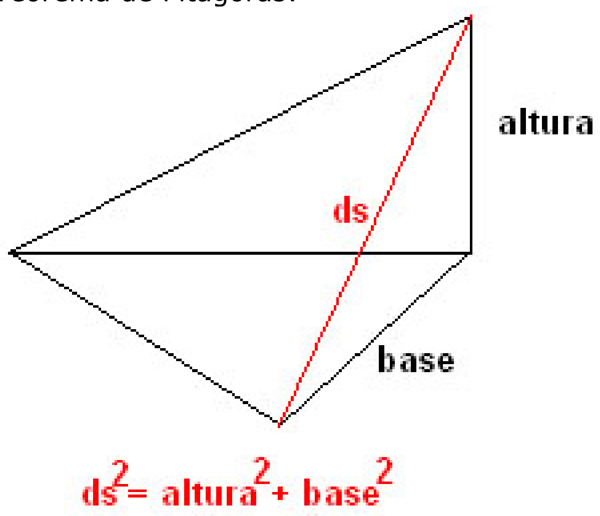
2. Variedades bidimensionales clásicas: plano, cilindro y esfera:

2.1. La longitud del intervalo y las ecuaciones de la variedad

a) Longitud del intervalo infinitesimal:

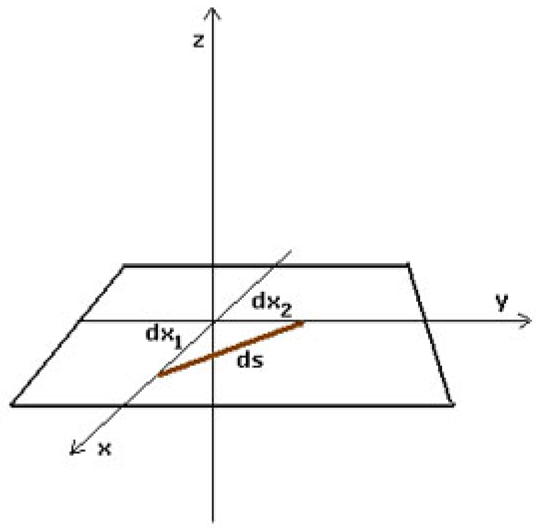
La longitud del intervalo infinitesimal, distancia entre dos puntos infinitamente próximos, se expresa de forma diferente según la curvatura de la variedad en donde se mida. Veamos los tres ejemplos más simples, variedad bidimensional plana, variedad bidimensional sobre una superficie cilíndrica y variedad bidimensional sobre una superficie esférica.

Para ello aproximamos los lados sobre la dirección de las coordenadas por longitudes rectilíneas habida cuenta del carácter infinitesimal, a fin de hacer el cálculo mediante el Teorema de Pitágoras:

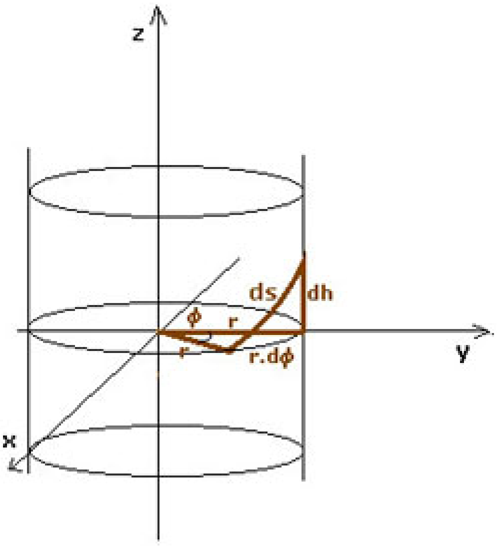


La expresión del cuadrado del intervalo infinitesimal es inmediata en cada variedad:

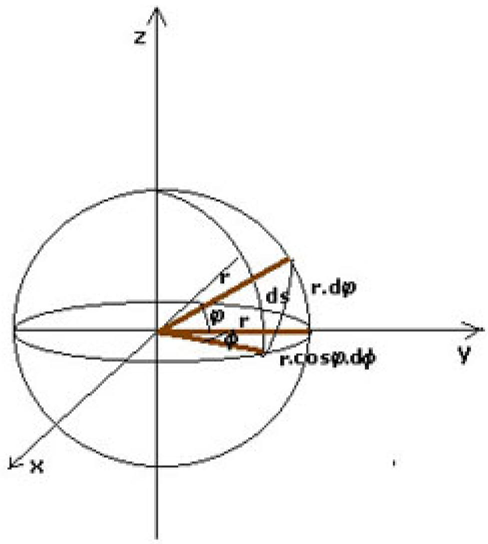
En la variedad plana: $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$



En la variedad cilíndrica: $ds^2 = r^2.d\phi^2 + dh^2$

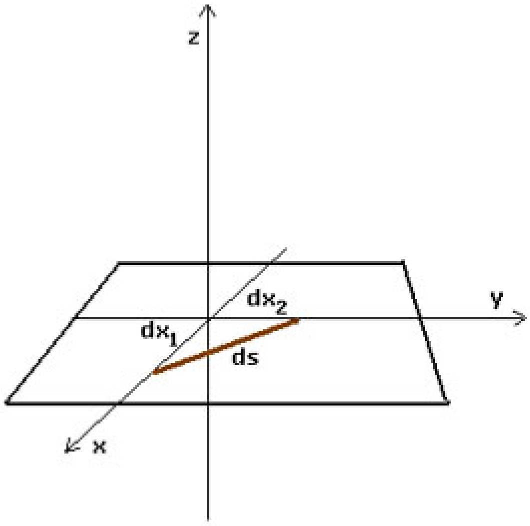


En la variedad esférica: $ds^2 = r^2.\cos^2\varphi.d\phi^2 + r^2.d\varphi^2$



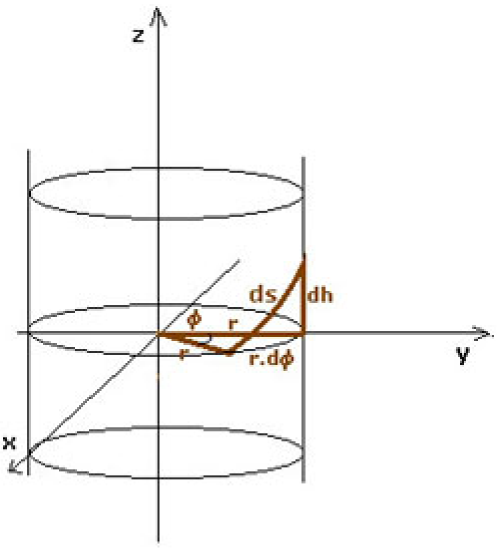
b) Ecuaciones que describen la variedad:

En la variedad plana (plano de la figura, es decir, coincidiendo con el plano coordenado x,y):



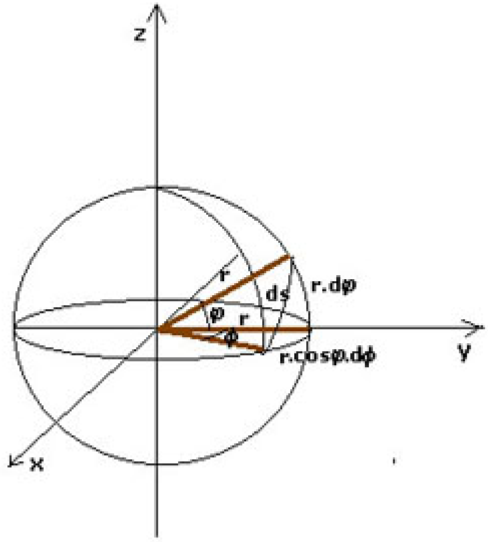
$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_2 \\ z = 0 \end{cases}$$

En la variedad cilíndrica (cilindro de radio r, cuyo eje de simetría es coincidente con el eje z):



$$\begin{cases} x = & r.\cos\phi \\ y = & r.sen\phi \\ z = & h \end{cases}$$

En la variedad esférica (esfera de radio r, cuyo centro coincide con el origen del sistema de referencia tridimensional):



$$\begin{cases} x = & r.\cos\varphi.sen\phi \\ y = & r.\cos\varphi.\cos\phi \\ z = & r.sen\varphi \end{cases}$$

2.2. La equivalencia entre la métrica y las ecuaciones de la variedad:

a) Obtención de la métrica de la variedad desde las ecuaciones que la describen:

- En la variedad plana:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = (dx_1, dx_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

Matriz métrica de la variedad: $(g_{ij})_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- En la variedad cilíndrica:

$$\begin{cases} x = & r.\cos\phi \\ y = & r.sen\phi \Rightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [d(r.\cos\phi)]^2 + [d(r.sen\phi)]^2 + dh^2 = r^2 sen^2\phi.d\phi^2 + \\ z = & h \end{cases}$$

$$+ r^2 \cos^2 \phi.d\phi^2 + dh^2 = r^2.d\phi^2 + dh^2 = (d\phi, dh)\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\phi \\ dh \end{pmatrix}$$

Matriz métrica de la variedad: $(g_{ij})_2 = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- En la variedad esférica:

$$\begin{cases} x = & r.\cos\varphi.sen\phi \\ y = & r.\cos\varphi.\cos\phi \Rightarrow ds^2 = [d(r.\cos\varphi.sen\phi)]^2 + [d(r.\cos\varphi.\cos\phi)]^2 + [d(r.sen\varphi)]^2 = \\ z = & r.sen\varphi \end{cases}$$

$$= [r.d(\cos\varphi).sen\phi + r.\cos\varphi.d(sen\phi)]^2 + [r.d(\cos\varphi).\cos\phi + r.\cos\varphi.d(\cos\phi)]^2 + [r.d(sen\varphi)]^2 =$$

$$= (-rsen\varphi.sen\phi.d\varphi + r\cos\varphi\cos\phi.d\phi)^2 + (-rsen\varphi\cos\phi.d\varphi - r\cos\varphi sen\phi.d\phi)^2 + (r.\cos\varphi.d\varphi)^2 =$$

$$= r^2.\cos^2\varphi.d\phi^2 + r^2.d\varphi^2 = (d\phi, d\varphi)\begin{pmatrix} r^2\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\phi \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

Matriz métrica de la variedad: $(g_{ij})_2 = \begin{pmatrix} r^2.\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$

b) Obtención de las ecuaciones de descripción de la variedad desde la métrica:

- La variedad bidimensional plana:

Longitud del intervalo en la métrica de la variedad bidimensional (sea una variedad plana perpendicular a uno de los ejes –eje z- del sistema de referencia tridimensional):

$$ds^2 = (dx_1, dx_2).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = dx_1^2 + dx_2^2$$

Así, pues, las variables son longitudes lineales y la matriz métrica es la matriz escalar unitaria:

$$(v_1, v_2) \equiv (x_1, x_2) \qquad (g_{ij})_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x_1, x_2 \ longitudes, \ \begin{cases} a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\ a_2 \leq x_2 \leq b_2 \end{cases}$$

Longitud del intervalo en un sistema del espacio tridimensional:

$$ds^2 = (dx, dy, dz).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Puesto que el intervalo es el mismo medido en la variedad que medido en el espacio tridimensional:

$$dx_1^2 + dx_2^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

de lo cual, tenemos:

$$dx_1^2 \equiv dx^2, \quad dx_2^2 \equiv dy^2, \ 0 = dz^2$$

Ecuaciones de caracterización de la variedad:

$$\begin{cases} dx^2 = dx_1^2 \\ dy^2 = dx_2^2 \\ dz^2 = 0 \end{cases}$$

o bien, prescindiendo de constantes de integración:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_2 \\ z = 0 \end{cases}$$

- La variedad bidimensional cilíndrica:

Longitud del intervalo en la métrica de la variedad bidimensional (supongamos una variedad cilíndrica cuyo eje de simetría coincide con el eje z del sistema de referencia tridimensional)

$$ds^2 = (d\phi, dh).\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\phi \\ dh \end{pmatrix} = r^2.d\phi^2 + dh^2$$

Por consiguiente, las variables son un ángulo y una longitud y la matriz métrica es una matriz diagonal muy simple:

$$(v_1, v_2) \equiv (\phi, h) \qquad (g_{ij})_2 = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \phi \text{ ángulo}, \ h \text{ longitud}$$

Longitud del intervalo en un sistema del espacio tridimensional:

$$ds^2 = (dx, dy, dz).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Puesto que el intervalo es el mismo medido en la variedad que medido en el espacio tridimensional:

$$r^2.d\phi^2 + dh^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

de lo cual podemos obtener las relaciones que definen la variedad:

$$r^2.sen^2\phi.d\phi^2 + r^2.\cos^2\phi.d\phi^2 + dh^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

y se tiene:

$$\begin{cases} dx^2 = r^2.sen^2\phi.d\phi^2 = [d(r.\cos\phi)]^2 \\ dy^2 = r^2.\cos^2\phi.d\phi^2 = [d(r.sen\phi)]^2 \\ dz^2 = dh^2 \end{cases}$$

por tanto:

$$\begin{cases} x = r.\cos\phi \\ y = r.sen\phi \\ z = h \end{cases}$$

- La variedad bidimensional esférica:

Longitud del intervalo en la métrica de la variedad bidimensional (supongamos una variedad esférica centrada en el origen del sistema de referencia tridimensional)

$$ds^2 = (d\phi, d\varphi).\begin{pmatrix} r^2.\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\phi \\ d\varphi \end{pmatrix} = r^2.\cos^2\varphi.d\phi^2 + r^2.d\varphi^2$$

Por consiguiente, las variables son dos ángulos y la matriz métrica es también muy sencilla:

$$(v_1, v_2) \equiv (\phi, \varphi) \qquad (g_{ij})_2 = \begin{pmatrix} r^2.\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \qquad \phi, \varphi \text{ ángulos}$$

Igualando intervalos:

$$r^2.\cos^2\varphi.d\phi^2 + r^2.d\varphi^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

y siendo:

$$r^2.\cos^2\varphi.d\phi^2 + r^2.d\varphi^2 = r^2.\cos^2\varphi.d\phi^2 + r^2(sen^2\varphi + \cos^2\varphi).d\varphi^2 =$$
$$= r^2 sen^2\varphi.d\varphi^2 + r^2.\cos^2\varphi.d\varphi^2 + r^2.\cos^2\varphi.d\phi^2 =$$
$$= r^2 sen^2\varphi.(sen^2\phi + \cos^2\phi)d\varphi^2 + r^2.\cos^2\varphi.d\varphi^2 + r^2.\cos^2\varphi.(sen^2\phi + \cos^2\phi)d\phi^2 =$$
$$= r^2 sen^2\varphi.sen^2\phi d\varphi^2 + r^2 sen^2\varphi.\cos^2\phi d\varphi^2 + r^2.\cos^2\varphi.d\varphi^2 + r^2.\cos^2\varphi.sen^2\phi d\phi^2 +$$
$$+ r^2.\cos^2\varphi.\cos^2\phi d\phi^2 =$$
$$= r^2 sen^2\varphi.sen^2\phi d\varphi^2 + r^2.\cos^2\varphi.\cos^2\phi d\phi^2 - 2r.sen\varphi.\cos\varphi.sen\phi.\cos\phi.d\varphi d\phi +$$
$$+ r^2 sen^2\varphi.\cos^2\phi d\varphi^2 + r^2.\cos^2\varphi.sen^2\phi d\phi^2 + 2r.sen\varphi.\cos\varphi.sen\phi.\cos\phi.d\varphi d\phi +$$
$$+ r^2.\cos^2\varphi.d\varphi^2 = (r.\cos\varphi.\cos\phi d\phi - r.sen\varphi.sen\phi d\varphi)^2 + (r.sen\varphi.\cos\phi d\varphi + r.\cos\varphi.sen\phi d\phi)^2 +$$
$$+ r^2.\cos^2\varphi.d\varphi^2 = \left[d(r.\cos\varphi.sen\phi)\right]^2 + \left[d(r.\cos\varphi\cos\phi)\right]^2 + \left[d(r.sen\varphi)\right]^2$$

Se tiene, al identificar:

$$\begin{cases} dx = d(r.\cos\varphi sen\phi) \\ dy = d(r.\cos\varphi\cos\phi) \\ dz = d(r.sen\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r.\cos\varphi sen\phi \\ y = r.\cos\varphi\cos\phi \\ z = r.sen\varphi \end{cases}$$

Documentación:
http://personales.ya.com/casanchi/mat/difabsoluto01.htm, Carlos S. Chinea
http://personales.ya.com/casanchi/mat/difabsoluto02.htm Carlos S. Chinea

Carmen SANCHEZ DIEZ
titakrmen@hotmail.com