Una breve incursión en las variedades de Riemann

1. Introducción

Dado un espacio euclidiano n+1 dimensional, entendemos por variedad n-dimensional V_n un conjunto de n-plas formadas por n variables, $u_1,...,u_n$, definidas en intervalos reales: $u_1 \in R_1,...,u_n \in R_n$

$$V_n = \left\{ \left(u_1,...,u_n \right) / u_i \in R_i, i = 1,...,n \right\}$$

donde cada n-pla $\left(u_1,...,u_n \right)$ representa un punto de la variedad.

Cuando en el conjunto de puntos que constituye una variedad n-dimensional se define una métrica, una distancia entre sus puntos, se tiene el concepto de variedad n-dimensional de Riemann, o bien dominio n-dimensional limitado de espacio de Riemann, inmerso en el espacio euclidiano m dimensional (m>n).

1.1. Las variedades de Riemann

Una variedad de Riemann, o bien, un dominio limitado de Riemann inmerso en un espacio euclidiano E_m, m dimensional, es una variedad n dimensional formada por n-plas de variables u_i definidas en intervalos reales $u_i \in R_i, i = 1,...,n$, junto con una métrica $(g_{ik})_n$:

$$\text{Variedad de Riemann:} \qquad \left(V_n, (g_{ik})_n \right)$$

Siendo, por tanto:

$$V_n = \left\{ \left(u_1,...,u_n \right) / u_i \in R_i, i = 1,...,n \right\}$$

$$(g_{ik})_n = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Los puntos de la variedad V_n son también puntos del espacio euclidiano m dimensional E_m en el cual está inmersa la variedad, por lo que la distancia infinitesimal ds entre dos puntos infinitamente próximos de la variedad puede medirse tanto usando la métrica $(g_{ik})_n$ de la variedad como la métrica corriente ortonormal del espacio euclidano E_m que contiene a la variedad de Riemann:

$$\begin{cases} ds^2 = \sum_{i,k}^{n} g_{ik} du_i du_k \\ ds^2 = \sum_{j}^{m} dx_j^2 \end{cases}$$

y de la identificación de ambas medidas podemos obtener las ecuaciones del dominio limitado de Riemann:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1,...,u_n) \\ x_2 = \varphi_2(u_1,...,u_n) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ x_m = \varphi_m(u_1,...,u_n) \end{cases}$$

Veamos a continuación algunos ejemplos de variedades de Riemann bidimensionales inmersas en el espacio euclidiano tridimensional, para observar cómo al variar la métrica asignada a la misma varía la forma geométrica del recinto de la variedad.

Consideremos en estos ejemplos la misma variedad, V_2, de forma que la única diferencia entre uno y otro dominio de Riemann va a ser la diferente definición de la métrica. Sea, pues:

$$V_2 = \left\{ (u,v) / 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

en la que los pares (u,v) son los puntos de la variedad, estando las variables definidas en los intervalos $\left[0,2\pi\right]$ y $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$.

a) Caso en el que la métrica es:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con la que obtenemos la distancia entre dos puntos infinitamente próximos:

$$ds^2 = g_{ik} du dv = (du, dv) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (du, dv) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = du^2 + dv^2$$

Si determinamos tal distancia en el espacio euclidano tridimensional que contiene a la variedad:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Proposición: Si las ecuaciones de la variedad son

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}$$

entonces la distancia ds entre puntos infinitamente próximos, es la misma calculada con la métrica de la variedad y calculada con la métrica ortonormal del espacio euclidiano tridimensional:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + dv^2$$

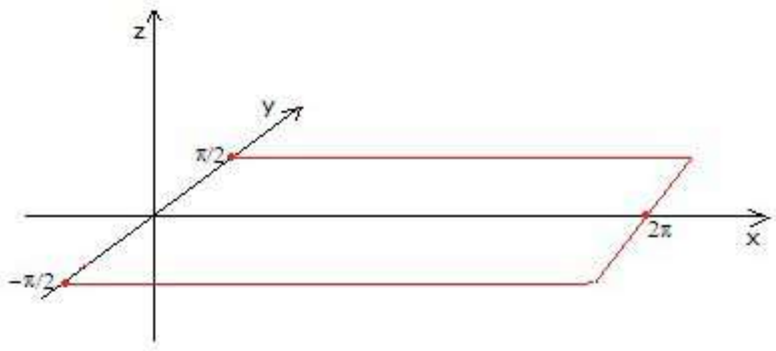
En efecto: pues trivialmente es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + 0 = du^2 + dv^2$$

por tanto la variedad de Riemann en este caso es el dominio plano

$$\{0 \le x \le 2\pi, -\pi/2 \le y \le \pi/2\}$$

que puede representarse gráficamente por



a) Veamos ahora el caso en el que la métrica es

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

(r constante arbitraria)

Se tiene para la distancia entre puntos infinitamente próximos:

$$ds^2 = g_{ik} du dv = \left(du, dv\right) \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \left(r^2 \cos^2 v du, r^2 dv\right) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} =$$

$$= r^2 \cos^2 v du^2 + r^2 dv^2$$

Y la distancia en el espacio euclidiano tridimensional entre dos puntos infinitamente próximos:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Proposición: Si las ecuaciones de la variedad son

$$\begin{cases} x = r.\cos v.\cos u \\ y = r.\cos v.senu \\ z = rsenv \end{cases}$$

entonces la distancia ds entre puntos infinitamente próximos, es la misma calculada con la métrica de la variedad y calculada con la métrica ortonormal del espacio euclidiano tridimensional:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2.\cos^2 v.du^2 + r^2.dv^2$$

En efecto:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = -r.\cos v.senu.du - r.senv.senu.dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = r.\cos v.\cos u.du - r.senv.senu.dv$$

$$dz = r.\cos v.dv$$

Si obtenemos los cuadrados:

$$dx^2 = (-r.\cos v.senu.du - r.senv.\cos u.dv)^2 = r^2 \cos^2 v.sen^2 u.du^2 +$$

$$+ r^2 sen^2 v.\cos^2 u.dv^2 + 2r^2 \cos v.senv.senu.\cos u du.dv$$

$$dy^2 = (r.\cos v.\cos u.du - r.senv.senu.dv)^2 = r^2 \cos^2 v.\cos^2 u.du^2 +$$

$$+ r^2 sen^2 v.sen^2 u.dv^2 - 2r^2 \cos v.senv.senu.\cos u du.dv$$

$$dz^2 = r^2 \cos^2 dv^2$$

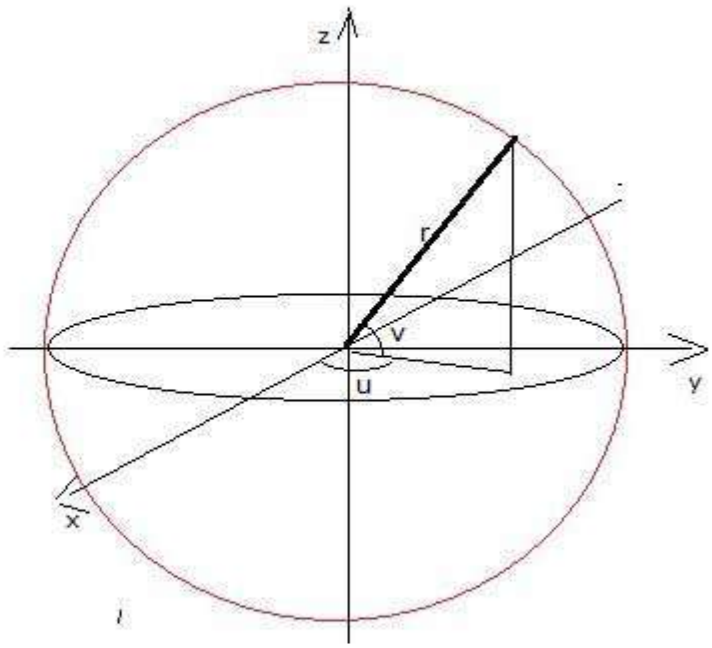
Sumamos simplificando:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 \cos^2 v.du^2 + r^2 sen^2 v.dv^2 + r^2 \cos^2 dv^2 =$$

$$= r^2 \cos^2 v.du^2 + r^2.dv^2$$

que es la misma expresión que se obtiene desde la métrica del dominio de Riemann.

Por tanto la variedad de Riemann en este caso es el dominio esférico de radio r definido por las ecuaciones indicadas, que podemos representar gráficamente por



c) Veamos ahora el caso en el que la métrica viene dada por

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene para la distancia entre puntos infinitamente próximos:

$$ds^2 = g_{ik} du dv = (du, dv) \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (r^2 du, dv) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = r^2 du^2 + dv^2$$

Y la distancia en el espacio euclidiano tridimensional entre dos puntos infinitamente próximos:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Proposición: Si las ecuaciones de la variedad son

$$\begin{cases} x = r.\cos u \\ y = r.senu \\ z = v \end{cases}$$

entonces la distancia ds entre puntos infinitamente próximos, es la misma calculada con la métrica de la variedad y calculada con la métrica ortonormal del espacio euclidiano tridimensional:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2.du^2 + dv^2$$

En efecto:

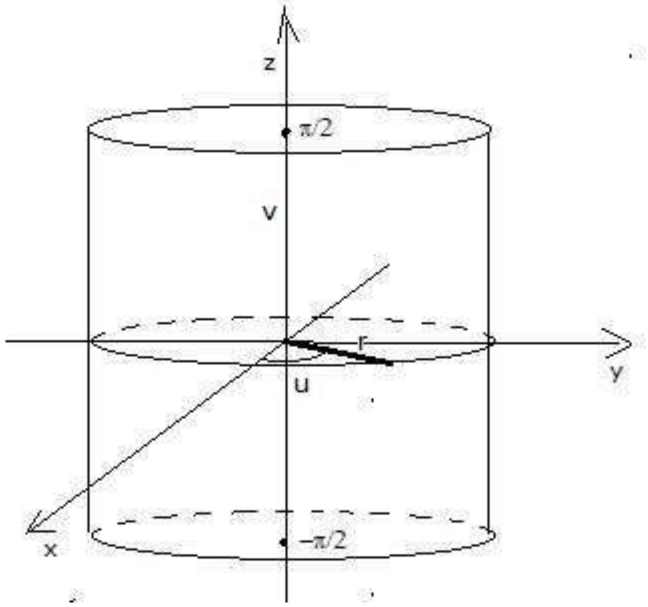
$$\begin{cases} dx = -r.senu.du \\ dy = r.\cos u.du \\ dz = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx^2 = r^2 sen^2 u.du^2 \\ dy^2 = r^2 \cos^2 u.du^2 \\ dz^2 = dv^2 \end{cases}$$

Sumamos y simplificamos:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 sen^2 u.du^2 + r^2 \cos^2 u.du^2 + dv^2 = r^2.du^2 + dv^2$$

que es la misma expresión que se obtiene desde la métrica del dominio de Riemann.

Por tanto la variedad de Riemann en este caso es el dominio cilíndrico de radio r definido por las ecuaciones indicadas, que podemos representar gráficamente por



1.2. Las magnitudes tensoriales en una variedad de Riemann

- Vectores covariantes y contravariantes:

Dado un punto genérico de la variedad V_n, $M(x^k), k = 1,...,n,$ y un cambio de coordenadas $M(x^k) \rightarrow M(y^j), j = 1,...,n$, esto es, tal que $y^j = y^j(x^k), j = 1,...,n$.

Si llamamos $\frac{\partial x^k}{\partial y^p} = A_p^k$, $\frac{\partial y^k}{\partial x^p} = B_p^k$, definimos:

Un vector covariante es el conjunto $v_i(x^k), k = 1,...,n$, tal que en el cambio de coordenadas $x^k \rightarrow v^j$ se trasforma del modo $v_i(x^k) \rightarrow u_p(y^j)$, siendo

$$u_p = A_p^k v_k = \frac{\partial x^k}{\partial y^p} v_k$$

Un vector contravariante es el conjunto $v^j(x^k), k = 1,...,n$, tal que en el cambio de coordenadas $x^k \to y^j$ se transforma del modo $v^j(x^k) \to u^q(y^j)$, siendo

$$u^q = B_j^q v^j = \frac{\partial y^q}{\partial x^j} v^j$$

- El tensor métrico:
En los espacios euclidianos sabemos que la matriz métrica (g_{ik}) y su inversa (g^{ik}) cumplen que

$$g_{ik} g^{jk} = \delta_{ij}$$

(donde δ_{ij} es la delta de Kronecker o pseudotensor de Kronecker de dos índices) estando ligadas las componentes covariantes y contravariantes por las relaciones:

$$v_i = g_{ij} v^j \,,\; v^j = g^{ij} v_i$$

de este modo, en los espacios euclidianos las magnitudes vectoriales adquieren carácter intrínseco, independiente de la forma de representación.

Como una variedad de Riemann queda definida por una variedad V_n y una métrica (g_{ik}), en general no euclidiana, para que en las variedades de Riemann también las magnitudes vectoriales tengan carácter intrínseco se hace conveniente exigir que el tensor métrico g_{ik} sea simétrico y tal que la forma covariante y contravariante se relacionen por

$$g_{ik} g^{jk} = \delta_{ij}$$

lo cual permite definir el producto interior de vectores, el módulo y la norma de un vector de forma que coincidan con la definición de estas operaciones en los espacios euclidianos:

Producto interior: $(u,v) = g_{ij} u^i v^j = u_j v^j$

Norma y módulo: $(u,u) = u_j u^j$, $|u| = +\sqrt{(u.u)} = +\sqrt{u_j u^j}$

Elemento diferencial de longitud: $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$

- Las magnitudes tensoriales en general:
Del mismo modo que ocurre con los vectores, las magnitudes tensoriales de mayor órden $t_{ik},...,t^{hmr},...,t_{jk}^{pq},...,t_{i_1...i_a}^{k_1...k_b}...$ se definen en las variedades de Riemann del mismo modo que en los espacios euclidianos:

Consideremos un cambio de la base $\{\vec{u}_k\}_n$ a la base $\{\vec{e}_j\}_n$

$$\left\{\vec{u}_k\right\}_n \rightarrow \left\{\frac{\partial x^k}{\partial y^j}\vec{u}_k\right\} = \left\{\vec{e}_j\right\}_n$$

esto es, llamando $A_j^k \equiv \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^j}\right)$ a la matriz de paso, $\vec{e}_j = A_j^k \vec{u}_k$, y llamemos B_k^j a la matriz del paso inverso $\vec{u}_k = B_k^j \vec{e}_j$.

Una magnitud T' expresada en la base $\left\{\vec{e}_j\right\}_n$ tiene carácter tensorial sii está relacionada con la misma magnitud T expresada en al base $\left\{\vec{u}_k\right\}_n$ mediante el producto de las matrices de paso indicadas antes:

$$T' = A_{j_1}^{k_1}.A_{j_2}^{k_2}....A_{j_p}^{k_p}.B_{k_1}^{j_1}.B_{k_2}^{j_2}....B_{k_s}^{j_s}.T$$

diremos que la magnitud tensorial T es p-covariante y s-contravariante.

Ejemplos:

1) $T'_{j_1 j_2} = A_{j_1}^{k_1}.A_{j_2}^{k_2} T_{k_1 k_2}$ es un tensor 2-covariante

2) $T'^{i_1}_{j_1 j_2} = A_{j_1}^{k_1}.A_{j_2}^{k_2} B_{h_1}^{i_1} T^{h_1}_{k_1 k_2}$ es un tensor 2-covariante 1-contravariante

3) $T'^{i_1 i_2} = B_{h_1}^{i_1} B_{h_2}^{i_2} T^{h_1 h_2}$ es un tensor 2-contravariante

4) $T'_{j_1 j_2} = A_{j_1}^{k_1}.A_{j_2}^{k_2} T_{k_1 k_2} + H$ no es un tensor

Ejemplo: La métrica g_{ik} es un tensor 2-covariante:

Consideremos el cambio $\vec{e}_j = A_j^k \vec{u}_k$ y llamemos $g'_{ij} = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right), \quad g_{kh} = \left(\vec{u}_k, \vec{u}_h\right)$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(x^i \vec{e}_i, x^j \vec{e}_j\right) = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) x^i x^j = g'_{ij} x^i x^j$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(x^i \vec{e}_i, x^j \vec{e}_j\right) = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) x^i x^j = \left(A_i^k \vec{u}_k, A_j^h \vec{u}_h\right) x^i x^j = A_i^k A_j^h g_{kh} x^i x^j$$

identificando:

$$g'_{ij} = A_i^k A_j^h g_{kh}$$

Se trata, por tanto, de un tensor 2-covariante.

1.3. Los símbolos de Christoffel

Se denominan igual que en los espacios euclidianos, símbolos de primera especie (los representaremos por (ij,k)) y símbolos de segunda especie (los Γ_{ij}^h), y su definición se da aquí de modo que concuerde con las relaciones y significado geométrico que tienen en los espacios euclidianos, donde se introducen en el estudio del sistema natural de referencia.

- Los símbolos de 1ª especie:

Definición:

$$\left(ij,k\right) = \frac{1}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right] \qquad [1.3.1]$$

Teorema 1.3.1 (Simetría):
Los símbolos de 1ª especie son simétricos respecto a los dos primeros índices.
Demostración:

trivialmente: $\left(ij,k\right)=\frac{1}{2}\left[\partial_i g_{jk}+\partial_j g_{ik}-\partial_k g_{ij}\right]=\frac{1}{2}\left[\partial_j g_{ik}+\partial_i g_{jk}-\partial_k g_{ij}\right]=\left(ji,k\right)$

Teorema 1.3.2 (Carácter no tensorial de los símbolos de 1ª especie):
Los símbolos de 1ª especie no son un tensor, salvo que la transformación de coordenadas sea lineal, en cuyo caso serían un tensor 3-covariante, verificándose

$$\left(pq,s\right)'=A_p^i A_q^j A_s^k\left(ij,k\right)+A_{pq}^i A_s^j g_{ij}$$

Demostración:

Sea $\left(pq,s\right)'=\frac{1}{2}\left[\partial_p g'_{qs}+\partial_q g'_{ps}-\partial_s g'_{pq}\right]$ y veamos por separado cada uno de los sumandos que figuran en el corchete:

$$\partial_p g'_{qs}=\partial_p\left(A_q^i A_s^j g_{ij}\right)=\partial_p A_q^i A_s^j g_{ij}+A_q^i\partial_p A_s^j g_{ij}+A_q^i A_s^j\partial_p g_{ij}=$$
$$=A_{qp}^i A_s^j g_{ij}+A_q^i A_{sp}^j g_{ij}+A_q^i A_s^j\partial_p g_{ij}=A_{qp}^i A_s^j g_{ij}+A_q^i A_{sp}^j g_{ij}+A_q^i A_s^j A_p^k\partial_k g_{ij}$$

$$\partial_q g'_{ps}=\partial_q\left(A_p^i A_s^j g_{ij}\right)=\partial_q A_p^i A_s^j g_{ij}+A_p^i\partial_q A_s^j g_{ij}+A_p^i A_s^j\partial_q g_{ij}=$$
$$=A_{pq}^i A_s^j g_{ij}+A_p^i A_{sq}^j g_{ij}+A_q^i A_s^j\partial_q g_{ij}=A_{pq}^i A_s^j g_{ij}+A_p^i A_{sq}^j g_{ij}+A_p^i A_s^j A_q^k\partial_k g_{ij}$$

$$\partial_s g'_{pq}=\partial_s\left(A_p^i A_q^j g_{ij}\right)=\partial_s A_p^i A_q^j g_{ij}+A_p^i\partial_s A_q^j g_{ij}+A_p^i A_q^j\partial_s g_{ij}=$$
$$=A_{ps}^i A_q^j g_{ij}+A_p^i A_{qs}^j g_{ij}+A_q^i A_q^j\partial_s g_{ij}=A_{ps}^i A_q^j g_{ij}+A_p^i A_{qs}^j g_{ij}+A_p^i A_q^j A_s^k\partial_k g_{ij}$$

Para homogeneizar las tres igualdades permutamos índices.

Permutando circularmente índices en la primera igualdad (i->j->k):
$$\partial_p g'_{qs}=A_{qp}^i A_s^j g_{ij}+A_q^i A_{sp}^j g_{ij}+A_q^i A_s^k A_p^j\partial_j g_{ik}=A_{qp}^j A_s^i g_{ij}+A_q^j A_{sp}^i g_{ij}+A_q^j A_s^k A_p^i\partial_i g_{jk}$$
Permutando los índices k,j en la segunda igualdad (k->j):
$$\partial_q g'_{ps}=A_{pq}^i A_s^j g_{ij}+A_p^i A_{sq}^j g_{ij}+A_p^i A_s^k A_q^j\partial_j g_{ik}$$
$$\partial_s g'_{pq}=A_{ps}^i A_q^j g_{ij}+A_p^i A_{qs}^j g_{ij}+A_p^i A_q^j A_s^k\partial_k g_{ij}$$

Entonces:
$$\left(pq,s\right)'=\frac{1}{2}\left[\partial_p g'_{qs}+\partial_q g'_{ps}-\partial_s g'_{pq}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[A_{pq}^i A_s^j g_{ij}+A_{pq}^i A_s^j g_{ij}+A_p^i A_q^j A_s^k\left(\partial_i g_{jk}+\partial_j g_{ik}-\partial_k g_{ij}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}2A_{pq}^i A_s^j g_{ij}+A_p^i A_q^j A_s^k\frac{1}{2}\left[\partial_i g_{jk}+\partial_j g_{ik}-\partial_k g_{ij}\right]=$$
$$=A_p^i A_q^j A_s^k\left(ij,k\right)+A_{pq}^i A_s^j g_{ij}$$

donde se observa que no sigue la regla de definición de una magnitud tensorial, ya que tiene un sumando añadido que puede no ser nulo. Si tal sumando fuera nulo, entonces sí se cumpliría la regla de definición de un tensor 3-covariante:

Si $A^i_{pq} A^j_s g_{ij} = 0 \rightarrow \left(pq,s\right)' = A^i_p A^j_q A^k_s \left(ij,k\right)$

Para que tal sumando sea nulo es necesario que

$$A^i_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial y^p \partial y^q} = \frac{\partial}{\partial y^p}\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^q}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial y^q} = const \rightarrow \text{transformación lineal}$$

Es decir, si la transformación es lineal, entonces los símbolos de Christoffel de 1ª especie son tensores 3-covariantes.

Teorema 1.3.3 (Identidad de Ricci):
Se verifica la igualdad:

$$\partial_i g_{jk} = \left(ij,k\right) + \left(ik,j\right)$$

Demostración:

$$\left(ij,k\right) + \left(ik,j\right) = \frac{1}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right] + \frac{1}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} 2\partial_i g_{jk} = \partial_i g_{jk}$$

- Los símbolos de 2ª especie:
Definición:

$$\Gamma^h_{ij} = \left(ij,k\right).g^{kh}$$

Teorema 1.3.1(b) (Simetría):
Los símbolos de 2ª especie son simétricos respecto a los dos índices inferiores.
Demostración:
Es trivial, desde la simetría de los símbolos de 1ª especie, ya que

$$\Gamma^h_{ij} = \left(ij,k\right).g^{kh} = \left(ji,k\right).g^{kh} = \Gamma^h_{ji}$$

Teorema 1.3.2 (b) (Carácter no tensorial de los símbolos de 2ª especie):
Los símbolos de 2ª especie no son un tensor, salvo que la transformación de coordenadas sea lineal, en cuyo caso serían un tensor 2-covariante, 1-contravariante, verificándose

$$\Gamma^{r'}_{pq} = A^i_p A^j_q B^r_h \Gamma^h_{ij} + A^h_{pq} B^r_h$$

Demostración:
Como es, por definición, $\Gamma'^r_{pq} = (pq,s)'.g'^{sr}$, y siendo $g'^{sr} = B^s_k B^r_h g^{kh}$, será:

$$\Gamma'^r_{pq} = (pq,s)'.g'^{sr} = (pq,s)'.B^s_k B^r_h g^{kh} = \left(A^i_P A^j_q A^k_s \left(ij,k\right) + A^i_{pq} A^j_s g_{ij}\right).B^s_k B^r_h g^{kh} =$$

$$= A^i_P A^j_q A^k_s B^s_k B^r_h \left(ij,k\right) g^{kh} + A^i_{pq} A^j_s B^s_k B^r_h g_{ij} g^{kh}$$

y siendo $A^k_s B^s_k = I$ y $A^j_s B^s_k = \delta_{jk}$, quedará

$$\Gamma'^{r}_{pq} = A^i_p A^j_q B^r_h (ij,k) g^{kh} + A^i_{pq} \delta_{jk} B^r_h g_{ij} g^{kh} = A^i_p A^j_q B^r_h (ij,k) g^{kh} + A^i_{pq} B^r_h g_{ij} g^{jh} =$$
$$= A^i_p A^j_q B^r_h (ij,k) g^{kh} + A^i_{pq} B^r_h \delta_{ih} = A^i_p A^j_q B^r_h (ij,k) g^{kh} + A^h_{pq} B^r_h =$$
$$= A^i_p A^j_q B^r_h \Gamma^h_{ij} + A^h_{pq} B^r_h$$

Donde observamos que al igual que en los símbolos de primera especie, no tienen carácter tensorial, por aparecer un sumando que podría no ser nulo. Caso de serlo sí serían estos símbolos tensores 2-cavariantes 1-contravariantes. Y al igual que en los símbolos de primera especie, esto ocurriría si la transformación de coordenadas es lineal.

Teorema 1.3.3 (c) (Identidad de Christoffel):
Se verifica la igualdad:

$$A^k_{pq} = A^k_r \Gamma'^{r}_{pq} - A^i_p A^j_q \Gamma^k_{ij} \quad [1.3.3.0]$$

Demostración:
Utilizando la expresión del teorema 1.3.2 (b):

$$\Gamma^{r'}_{pq} = A^i_p A^j_q B^r_h \Gamma^h_{ij} + A^h_{pq} B^r_h$$

Multiplicando ambos miembros por A^k_r :

$$A^k_r \Gamma^{r'}_{pq} = A^i_p A^j_q A^k_r B^r_h \Gamma^h_{ij} + A^h_{pq} A^k_r B^r_h \rightarrow A^k_r \Gamma^{r'}_{pq} = A^i_p A^j_q \delta_{kh} \Gamma^h_{ij} + A^h_{pq} \delta_{kh} \rightarrow$$
$$\rightarrow A^k_r \Gamma^{r'}_{pq} = A^i_p A^j_q \Gamma^k_{ij} + A^k_{pq}$$

De donde podemos despejar:

$$A^k_{pq} = A^k_r \Gamma^{r'}_{pq} - A^i_p A^j_q \Gamma^k_{ij}$$

Hemos visto en definitiva que si la transformación de coordenadas es lineal, esto es, de la forma

$$y^p \rightarrow x^k \,/\, \exists M, N \in R \ \text{ y } \ x^k = M.y^p + N$$

entonces los símbolos de Christoffel, de primera y de segunda especie, tienen carácter tensorial:

$(pq,s)' = A^i_p A^j_q A^k_s (ij,k)$ es tensor 3-covariante

$\Gamma^{r'}_{pq} = A^i_p A^j_q B^r_h \Gamma^h_{ij}$ es tensor 2-covariante 1-contravariante

en relación con la linealidad de las transformaciones de coordenadas podemos enunciar el siguiente teorema que es básico en su aplicación al estudio de la mecánica relativista.

Teorema 1.3.4 (cambio de métrica constante a métrica constante)
Las transformaciones de coordenadas que cambian una métrica de coeficientes constantes en otra métrica también de coeficientes constantes son siempre lineales.
Demostración:
Si la métrica es constante, es obvio que los símbolos de Christoffel se anulan. Esto es:

$$(g_{ik})_n \ const \rightarrow (ij,k) = \frac{1}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right] = 0, \quad \Gamma^h_{ij} = (ij,k).g^{kh} = 0$$

y de la identidad de Christoffel:

$$A^k_{pq} = A^k_r \Gamma'^r_{pq} - A^i_p A^j_q \Gamma^k_{ij} = 0 \rightarrow A^k_{pq} = \frac{\partial A^k_p}{\partial y^q} = 0 \rightarrow A^k_p = \frac{\partial x^k}{\partial y^p} = M, \text{ constante}$$

es decir,

$$dx^k = M.dy^p \rightarrow \exists M, N \in R / x^k = M.y^p + N$$

1.4. Sistemas de coordenadas localmente inerciales

Un sistema de coordenadas se dice que es geodésico, inercial o normal en un punto M_o si en tal punto se anulan los símbolos de Christoffel relativos al sistema.

El uso de estos sistemas de coordenadas, caso de existir, facilitaría enormemente los procesos de demostración de las propiedades de los tensores definidos en las variedades de Riemann. Se hace preciso, por tanto, comprobar que tales sistemas de coordenadas existen realmente. Dado un punto M_o se trata de comprobar que tal punto puede describirse mediante un sistema de coordenadas y^k inercial.

Teorema 1.4.1 (existencia de sistemas geodésicos)
Dado un punto $M_o(x^k)$ de una variedad de Riemann, descrito mediante un sistema de coordenadas x^k en el que no se anulan todos los símbolos de Christoffel, siempre es posible encontrar otro sistema de coordenadas y^k en el que tales símbolos sí se anulan.
Demostración:
Se trata de encontrar alguna transformación de coordenadas $x^k \rightarrow y^k$, tal que sea $y^k = y^k(x^k), k = 1,...,n$, de modo que siendo no nulos los símbolos de Christoffel respecto a las coordenadas x^k en el punto $M_o(x^k)$, $\left(\Gamma^r_{pq}\right)_0$, en cambio sí sean nulos los símbolos de Christoffel $\left(\Gamma'^r_{pq}\right)_0$ respecto a las coordenadas y^k en el punto $M_o(y^k)$.
Podemos ensayar una transformación del tipo:

$$y^k = x^k - x^k_0 + c^k_{ij}\left(x^i - x^i_0\right)\left(x^j - x^j_0\right) \qquad [1.4.0]$$

donde las c_{ij} son constantes a determinar para que se anulen los símbolos de Christoffel en el punto $M_o(y^k)$.

Derivando respecto a y^r:

$$\frac{\partial y^k}{\partial y^r} = \frac{\partial x^k}{\partial y^r} + c^k_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial y^r}\left(x^i - x^i_0\right) + c^k_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial y^r}\left(x^j - x^j_0\right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \delta_{kr} = A^k_r + c^k_{ij}A^j_r\left(x^i - x^i_0\right) + c^k_{ij}A^i_r\left(x^j - x^j_0\right) \qquad [1.4.1]$$

en el punto $M_o(x^k)$ es:

$$\delta_{kr} = (A^k_r)_0 + c^k_{ij}(A^j_r)_0\left(x^i_0 - x^i_0\right) + c^k_{ij}(A^i_r)_0\left(x^j_0 - x^j_0\right) = (A^k_r)_0 + 0 + 0 = (A^k_r)_0$$

por otra parte es $A^k_r.B^r_h = \delta_{kh}$, por lo que en el punto $M_o(x^k)$ es:

$$(A^k_r)_0.(B^r_h)_0 = \delta_{kr}.(B^r_h)_0 = (B^k_h)_0 = \delta_{kh}$$

En definitiva:

$$(A_r^k)_0 = \delta_{kr} \text{ y } (B_h^k)_0 = \delta_{kh} \qquad [1.4.2]$$

Derivando ahora la expresión [1.4.1] respecto a y^s :

$$\frac{\partial \delta_{kr}}{\partial y^s} = \frac{\partial A_r^k}{\partial y^s} + c_{ij}^k \frac{\partial A_r^j}{\partial y^s}\left(x^i - x_0^i\right) + c_{ij}^k A_r^j \frac{\partial\left(x^i - x_0^i\right)}{\partial y^s} + c_{ij}^k \frac{\partial A_r^i}{\partial y^s}\left(x^j - x_0^j\right) + c_{ij}^k A_r^i \frac{\partial\left(x^j - x_0^j\right)}{\partial y^s}$$

quedando:

$$0 = A_{rs}^k + c_{ij}^k A_{rs}^j\left(x^i - x_0^i\right) + c_{ij}^k A_r^j \frac{\partial\left(x^i - x_0^i\right)}{\partial y^s} + c_{ij}^k A_{rs}^i\left(x^j - x_0^j\right) + c_{ij}^k A_r^i \frac{\partial\left(x^j - x_0^j\right)}{\partial y^s}$$

o sea:

$$0 = A_{rs}^k + c_{ij}^k A_{rs}^j\left(x^i - x_0^i\right) + c_{ij}^k A_r^j A_s^i + c_{ij}^k A_{rs}^i\left(x^j - x_0^j\right) + c_{ij}^k A_r^i A_s^j$$

que en el punto $M_o(x^k)$ es:

$$0 = (A_{rs}^k)_0 + c_{ij}^k (A_{rs}^j)_0\left(x_0^i - x_0^i\right) + c_{ij}^k (A_r^j)_0 (A_s^i)_0 + c_{ij}^k (A_{rs}^i)_0\left(x_0^j - x_0^j\right) + c_{ij}^k (A_r^i)_0 (A_s^j)_0 =$$

$$= (A_{rs}^k)_0 + 0 + c_{ij}^k (A_r^j)_0 (A_s^i)_0 + 0 + c_{ij}^k (A_r^i)_0 (A_s^j)_0 = (A_{rs}^k)_0 + c_{ij}^k \delta_{rj}\delta_{si} + c_{ij}^k \delta_{ri}\delta_{sj} =$$

$$= (A_{rs}^k)_0 + c_{rs}^k + c_{sr}^k \rightarrow (A_{rs}^k)_0 = -(c_{rs}^k + c_{sr}^k) \qquad [1.4.3]$$

Si tenemos ahora en cuenta la identidad de Christoffel:

$$A_{pq}^k = A_r^k \Gamma'^r_{pq} - A_p^i A_q^j \Gamma_{ij}^k \rightarrow A_r^k \Gamma'^r_{pq} = A_{pq}^k + A_p^i A_q^j \Gamma_{ij}^k \rightarrow$$

$$\rightarrow A_r^k B_h^r \Gamma'^r_{pq} = A_{pq}^k B_h^r + A_p^i A_q^j B_h^r \Gamma_{ij}^k \rightarrow A_r^k B_h^r \Gamma'^r_{pq} = A_{pq}^k B_h^r + A_p^i A_q^j B_h^r \Gamma_{ij}^k \rightarrow$$

$$\rightarrow \Gamma'^r_{pq} = A_{pq}^h B_h^r + A_p^i A_q^j B_h^r \Gamma_{ij}^h$$

en el punto *$M_o(x^k)$* es:

$$(\Gamma'^r_{pq})_0 = (A_{pq}^h)_0 (B_h^r)_0 + (A_p^i)_0 (A_q^j)_0 (B_h^r)_0 (\Gamma_{ij}^h)_0$$

Sustituyendo [1.4.2] y [1.4.3]:

$$(\Gamma'^r_{pq})_0 = -(c_{pq}^h + c_{qp}^h)\delta_{hr} + \delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{hr}(\Gamma_{ij}^h)_0 = -(c_{pq}^r + c_{qp}^r) + (\Gamma_{pq}^r)_0$$

y para que sea $(\Gamma'^r_{pq})_0 = 0$ ha de ser $(\Gamma_{pq}^r)_0 = (c_{pq}^r + c_{qp}^r)$, cuya solución más simple sería:

$$c_{pq}^r = c_{qp}^r = \frac{1}{2}(\Gamma_{pq}^r)_0$$

por tanto, la transformación [1.4.0] que buscamos ha de ser

$$y^k = x^k - x_0^k + \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k)_0\left(x^i - x_0^i\right)\left(x^j - x_0^j\right)$$

para que el sistema de coordenadas y^k sea inercial.

Corolario 1.4.1
Las componentes t^{r}_{pq} de un tensor en el punto M_0 son las mismas en el sistema de coordenadas $\{x^k\}$ que en el sistema geodésico $\{y^k\}$.
Demostración:

$$t'^{r}_{pq} = A^i_p A^j_q B^r_k t^k_{ij} \rightarrow (t'^{r}_{pq})_0 = (A^i_p)_0 (A^j_q)_0 (B^r_k)_0 (t^k_{ij})_0 \rightarrow (t'^{r}_{pq})_0 = \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{rk}(t^k_{ij})_0 = (t^r_{pq})_0$$

Si un punto M pertenece a dos espacios distintos, E_1 y E_2, y las métricas respectivas toman el mismo valor en tal punto, $(g_{ij})^{(1)} = (g_{ij})^{(2)}$, se dirá que tales espacios son tangentes en M.

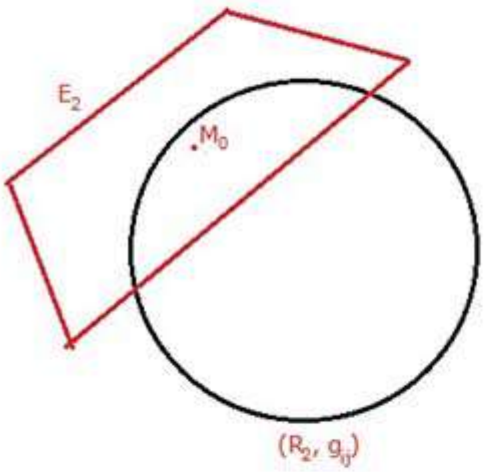
Espacio tangente a una variedad de Riemann:
Se denomina espacio tangente a una variedad de Riemann, (R_n, g_{ij}), en un punto M, al espacio euclidiano E_n cuya métrica es el tensor métrico que queda completamente determinado al considerar fijo el punto M.

$$\left(g_{ij}\right)_{E_n} = \left(g_{ij}\right)_{R_n}$$

Espacio osculador a una variedad de Riemann:
Es un espacio tangente en donde además coinciden las derivadas de la métrica en el punto común con la variedad de Riemann:

$$\left(\partial_k g_{ij}\right)_{E_n} = \left(\partial_k g_{ij}\right)_{R_n}$$

Un ejemplo intuitivo es el plano bidimensional tangente a la variedad bidimensional esférica de Riemann en el punto de contacto $M_0(y^1_o, y^2_0)$.



métrica en el punto $M_0(y^1_o, y^2_0)$ de la variedad esférica de radio r, y métrica constante del plano tangente E_2 en tal punto:

$$(g^0_{ij})_{R_2} = \begin{pmatrix} r^2\cos^2(y_0^2) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (g^0_{ij})_{E_2} = \begin{pmatrix} r^2\cos^2(y_0^2) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

2. Derivación absoluta covariante en las variedades de Riemann

2.1. Derivada covariante de una función escalar:

Dada la función escalar $U = U(x^k)$, sean las diferenciales respecto a las variables x_k:

$$U_k = \frac{\partial U}{\partial x^k} \equiv \partial_k U\ , \quad k = 1,...,n$$

se denomina vector derivada covariante de la función escalar $U = U(x^k)$ al vector:

$$(U_1,...,U_n) \equiv (\partial_1 U,...,\partial_n U) \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x^1},...,\frac{\partial U}{\partial x^n}\right)$$

es decir:

$$D_s U = \partial_s U$$

y en un cambio de variables $y^p = y^p(x^k),\ p = 1,...,n$, se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial y^p} = \frac{\partial U}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial y^p} = A^k_p U_k = A^1_p U_1 + ... + A^n_p U_n$$

2.2. Derivada covariante de un vector dado en forma contravariante:

Sea el vector contravariante $v^j(x^k)$, que en el cambio de coordenadas $y^j = y^j(x^k)$ se transforma $v^j(x^k) \to u^q(y^j)$. Se tiene:

$$u^q = B^q_j v^j \to v^j = A^j_r u^r \to \frac{\partial v^j}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(A^j_r u^r\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y^p}\left(A^j_r u^r\right)\frac{\partial y^p}{\partial x^k} = \frac{\partial A^j_r}{\partial y^p}\frac{\partial y^p}{\partial x^k}u^r + A^j_r\frac{\partial u^r}{\partial y^p}\frac{\partial y^p}{\partial x^k}$$

Si representamos $\partial_k v^j = \dfrac{\partial v^j}{\partial x^k},\ \partial'_p u^r = \dfrac{\partial u^r}{\partial y^p}$ queda: $\partial_k v^j = A^j_{rp} B^p_k u^r + A^j_r B^p_k \partial'_p u^r$

Utilizamos la identidad de Christoffel [1.3.3.0], $A^j_{rp} = A^j_a \Gamma'^a_{rp} - A^m_r A^h_p \Gamma^j_{mh}$. Al sustituir resulta:

$$\partial_k v^j = \left(A^j_a \Gamma'^a_{rp} - A^m_r A^h_p \Gamma^j_{mh}\right) B^p_k u^r + A^j_r B^p_k \partial'_p u^r =$$

$$= A^j_a B^p_k \Gamma'^a_{rp} u^r - A^m_r A^h_p B^p_k \Gamma^j_{mh} u^r + A^j_r B^p_k \partial'_p u^r$$

y como es $A^h_p B^p_k = \delta_{hk}$ y $A^m_r u^r = v^m$ se tiene:

$$\partial_k v^j = A_a^j B_k^p \Gamma'^a_{rp} u^r - \delta_{hk}\Gamma^j_{mh} v^m + A_r^j B_k^p \partial'_p u^r = A_a^j B_k^p \Gamma'^a_{rp} u^r - \Gamma^j_{mk} v^m + A_r^j B_k^p \partial'_p u^r$$

reordenando respecto a las coordenadas:

$$\partial_k v^j + \Gamma^j_{mk} v^m = A_a^j B_k^p \Gamma'^a_{rp} u^r + A_r^j B_k^p \partial'_p u^r = A_a^j B_k^p \Gamma'^a_{rp} u^r + A_a^j B_k^p \partial'_p u^a =$$

$= A_a^j B_k^p \left(\partial'_p u^a + \Gamma'^a_{rp} u^r\right)$, que con la notación $D_k v^j = \partial_k v^j + \Gamma^j_{mk} v^m$ finalmente queda:

$$D_k v^j = A_a^j B_k^p D_p u^a$$

que es la derivada covariante absoluta del vector contravariante $v^j(x^k)$. Se observa su carácter tensorial: es un tensor mixto 1-covariante 1-contravariante.

2.3. Derivada covariante de un vector dado en forma covariante:

Sea el vector covariante $v_j(x^k)$, que en el cambio de coordenadas $y^j = y^j(x^k)$ se transforma $v_j(x^k) \to u_q(y^j)$. Se tiene:

$$u_r = A_r^j v_j \to \frac{\partial u_r}{\partial y^p} = \frac{\partial}{\partial y^p}\left(A_r^j v_j\right) = \frac{\partial A_r^j}{\partial y^p} v_j + A_r^j \frac{\partial v_j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial y^p} =$$

$$= A_{rp}^j v_j + A_r^j A_p^k \frac{\partial v_j}{\partial x^k} \to \partial'_p u_r = A_{rp}^j v_j + A_r^j A_p^k \partial_k v_j$$

representando por $\partial'_p u_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial y^p}$, $\partial_k v_j = \dfrac{\partial v_j}{\partial x^k}$

Utilizamos la identidad de Christoffel [1.3.3.0], $A_{rp}^j = A_a^j \Gamma'^a_{rp} - A_r^m A_p^h \Gamma^j_{mh}$. Al sustituir resulta:

$$\partial'_p u_r = A_{rp}^j v_j + A_r^j A_p^k \partial_k v_j = \left(A_a^j \Gamma'^a_{rp} - A_r^m A_p^h \Gamma^j_{mh}\right) v_j + A_r^j A_p^k \partial_k v_j =$$

$$= A_a^j \Gamma'^a_{rp} v_j - A_r^m A_p^h \Gamma^j_{mh} v_j + A_r^j A_p^k \partial_k v_j = u_a \Gamma'^a_{rp} - A_r^m A_p^h \Gamma^j_{mh} v_j + A_r^j A_p^k \partial_k v_j$$

reordenando respecto a las coordenadas:

$$\partial'_p u_r - u_a \Gamma'^a_{rp} = A_r^j A_p^k \partial_k v_j - A_r^m A_p^h v_j \Gamma^j_{mh} = A_r^m A_p^h \left(\partial_k v_j - v_j \Gamma^j_{mh}\right)$$

o sea:

$$\partial'_p u_r - u_a \Gamma'^a_{rp} = A_r^j A_p^k \partial_k v_j - A_r^m A_p^h v_j \Gamma^j_{mh} = A_r^m A_p^h \left(\partial_k v_j - v_s \Gamma^s_{mh}\right)$$

o bien:

$$\partial_k v_j - v_s \Gamma^s_{mh} = B_m^r B_h^p \left(\partial'_p u_r - u_a \Gamma'^a_{rp}\right)$$

que con la notación $D_k v_j = \partial_k v_j - v_s \Gamma^s_{mk}$ resulta:

$$D_k v_j = B_j^r B_k^p D'_p u_r$$

que es la derivada covariante absoluta del vector covariante $v_j(x^k)$. Se observa su carácter tensorial: es un tensor 2-covariante.

2.4. Derivada covariante de magnitudes tensoriales:

Veamos la derivada covariante de un tensor 2-covariante:

Sea $t'_{rs} = A^i_r A^j_s t_{ij}$. Se tiene: $\partial' t'_{rs} = \dfrac{\partial t'_{rs}}{\partial y^p} = \dfrac{\partial}{\partial y^p}\left(A^i_r A^j_s\right) t_{ij} + A^i_r A^j_s \dfrac{\partial t_{ij}}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^k}{\partial y^p} =$

$$= \left(A^i_{rp} A^j_s + A^i_r A^j_{sp}\right) t_{ij} + A^i_r A^j_s A^k_p \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^k}$$

Usamos ahora la identidad de Christoffel para eliminar las A^i_{rp} y A^j_{sp}:

$A^i_{rp} = A^i_a \Gamma'^a_{rp} - A^m_r A^h_p \Gamma^i_{mh}$ y $A^j_{sp} = A^j_a \Gamma'^a_{sp} - A^m_s A^h_p \Gamma^j_{mh}$

se tiene:

$$\partial' t'_{rs} = \left(A^i_{rp} A^j_s + A^i_r A^j_{sp}\right) t_{ij} + A^i_r A^j_s A^k_p \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^k} = A^i_a A^j_s \Gamma'^a_{rp} t_{ij} - A^m_r A^h_p A^j_s \Gamma^i_{mh} t_{ij} +$$

$$+ A^j_a A^i_r \Gamma'^a_{sp} t_{ij} - A^m_s A^h_p A^i_r \Gamma^j_{mh} t_{ij} + A^i_r A^j_s A^k_p \partial_k t_{ij} =$$

$$= \Gamma'^a_{rp} t'_{as} - A^m_r A^h_p A^j_s \Gamma^i_{mh} t_{ij} + \Gamma'^a_{sp} t'_{ar} - A^m_s A^h_p A^i_r \Gamma^j_{mh} t_{ij} + A^i_r A^j_s A^k_p \partial_k t_{ij}$$

reordenando:

$$\partial' t'_{rs} - \Gamma'^a_{rp} t'_{as} - \Gamma'^a_{sp} t'_{ar} = A^i_r A^j_s A^k_p \partial_k t_{ij} - A^i_r A^j_s A^k_p \Gamma^b_{ik} t_{bj} - A^i_r A^j_s A^k_p \Gamma^b_{jk} t_{bi} =$$

$$= A^i_r A^j_s A^k_p \left(\partial_k t_{ij} - \Gamma^b_{ik} t_{bj} - \Gamma^b_{jk} t_{bi}\right) \to D'_p t'_{rs} = A^i_r A^j_s A^k_p D_k t_{ij}$$

Es decir, la derivada absoluta covariante de un tensor 2-covariante es un tensor 3-covariante.

Siguiendo idéntico procedimiento obtenemos la derivada covariante de un tensor de cualquier orden. Puede comprobar el lector la expresión de la derivada absoluta covariante de un tensor mixto de segundo orden o de un tensor mixto de tercer orden 2-covariante 1-contravariante:

$$D_j t^q_p = \partial_j t^q_p + t^m_p \Gamma^q_{mj} - t^q_m \Gamma^m_{pj}$$

$$D_k t^h_{ij} = \partial_k t^h_{ij} - t^h_{aj} \Gamma^a_{ki} - t^h_{ia} \Gamma^a_{kj} - t^a_{ij} \Gamma^h_{ak}$$

Teorema: La derivada covariante absoluta del tensor métrico es nula.
Demostración:
Puesto que el tensor métrico, g_{ij}, es un tensor 2-covariante, podemos aplicar el resultado anterior: $D_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^b_{ik} g_{bj} - \Gamma^b_{jk} g_{bi} = \partial_k g_{ij} - (ki,j) - (kj,i)$

Y aplicando la identidad de Ricci ($\partial_k g_{ij} = (ki,j) + (kj,i)$): $D_k g_{ij} = 0$

3. Derivación covariante absoluta de segundo orden. Tensor de curvatura. La forma covariante de Riemann

3.1. Definición. Tensor de curvatura y forma covariante de Riemann:

Se define la derivada covariante absoluta de segundo órden de un vector v^q como la derivada covariante absoluta de la derivada covariante absoluta del vector v^q.

Llamando $t_p^q = D_p v^q$, se tiene:

$$D_{jp} v^q = D_j \left(D_p v^q \right) = D_j t_p^q$$

$$D_{jp} v^q = D_j \left(D_p v^q \right) = D_j t_p^q = \partial_j t_p^q + t_p^m \Gamma_{mj}^q - t_m^q \Gamma_{pj}^m = \partial_j \left(\partial_p v^q + v^h \Gamma_{hp}^q \right) +$$
$$+ \left(\partial_p v^m + v^r \Gamma_{rp}^m \right) \Gamma_{mj}^q - \left(\partial_m v^q + v^s \Gamma_{sm}^q \right) \Gamma_{pj}^m = \partial_{jp} v^q + \partial_j v^h \Gamma_{hp}^q + v^h \partial_j \Gamma_{hp}^q +$$
$$+ \partial_p v^m \Gamma_{mj}^q + v^r \Gamma_{rp}^m \Gamma_{mj}^q - \partial_m v^q \Gamma_{pj}^m - v^s \Gamma_{sm}^q \Gamma_{pj}^m =$$
$$= \left[\partial_{jp} v^q + \partial_j v^h \Gamma_{hp}^q + \partial_p v^m \Gamma_{mj}^q - \partial_m v^q \Gamma_{pj}^m - v^s \Gamma_{sm}^q \Gamma_{pj}^m \right] + \left(\partial_j \Gamma_{rp}^q + \Gamma_{rp}^m \Gamma_{mj}^q \right) v^r$$

El primer término, entre corchetes, es simétrico respecto a los índices p y j. Lo representaremos por $T_{jp} = \left[\partial_{jp} v^q + \partial_j v^h \Gamma_{hp}^q + \partial_p v^m \Gamma_{mj}^q - \partial_m v^q \Gamma_{pj}^m - v^s \Gamma_{sm}^q \Gamma_{pj}^m \right]$. Resulta:

$$D_{jp} v^q = T_{jp} + \left(\partial_j \Gamma_{rp}^q + \Gamma_{rp}^m \Gamma_{mj}^q \right) v^r$$

Veamos al curvatura:

$$\left. \begin{aligned} D_{jp} v^q &= T_{jp} + \left(\partial_j \Gamma_{rp}^q + \Gamma_{rp}^m \Gamma_{mj}^q \right) v^r \\ D_{pj} v^q &= T_{pj} + \left(\partial_p \Gamma_{rj}^q + \Gamma_{rj}^m \Gamma_{mp}^q \right) v^r \end{aligned} \right\} \rightarrow D_{jp} v^q - D_{pj} v^q =$$
$$= \left(\partial_j \Gamma_{rp}^q + \Gamma_{rp}^m \Gamma_{mj}^q \right) v^r - \left(\partial_p \Gamma_{rj}^q + \Gamma_{rj}^m \Gamma_{mp}^q \right) v^r = \left(\partial_j \Gamma_{rp}^q + \Gamma_{rp}^m \Gamma_{mj}^q - \partial_p \Gamma_{rj}^q - \Gamma_{rj}^m \Gamma_{mp}^q \right) v^r$$

Si llamamos ahora

$$R_{r,jp}^q = \partial_j \Gamma_{rp}^q + \Gamma_{rp}^m \Gamma_{mj}^q - \partial_p \Gamma_{rj}^q - \Gamma_{rj}^m \Gamma_{mp}^q$$

Se tendrá para la curvatura:

$$D_{jp} v^q - D_{pj} v^q = R_{r,jp}^q v^r$$

Al tensor $R_{r,jp}^q$ se le denomina *tensor de curvatura*, o *tensor de Riemann de cuatro índices y segunda especie*, o también, *tensor de Riemann-Christoffel.*

Desde el tensor de curvatura puede obtenerse un tensor covariante al multiplicarlo por el tensor métrico:

$$R_{rk,jp} = (rk, jp) = g_{qk} R_{r,jp}^q$$

Este tensor se denomina *forma covariante de Riemann*, o *tensor de Riemann de cuatro índices y primera especie.*

También se puede escribir, obviamente:

$$R_{r,jp}^q = g^{qk} R_{rk,jp}$$

3.2. Expresiones de la forma covariante de Riemann

a) Expresión de la forma covariante de Riemann en función del tensor métrico y de los símbolos de Christoffel

$$\left(hs,jp\right)=g_{sq}R^{q}_{h,jp}=g_{sq}\left[\partial_{j}\Gamma^{q}_{hp}+\Gamma^{m}_{hp}\Gamma^{q}_{mj}-\partial_{p}\Gamma^{q}_{hj}-\Gamma^{m}_{hj}\Gamma^{q}_{mp}\right]=$$
$$=g_{sq}\left(\partial_{j}\Gamma^{q}_{hp}+\Gamma^{m}_{hp}\Gamma^{q}_{mj}\right)-g_{sq}\left(\partial_{p}\Gamma^{q}_{hj}+\Gamma^{m}_{hj}\Gamma^{q}_{mp}\right)$$

Teniendo en cuenta la relación entre los símbolos de 1ª y 2ª especie:

$$\Gamma^{q}_{hp}=\left(hp,k\right)g^{qk},\ \Gamma^{m}_{hp}=\left(hp,k\right)g^{mk},\ \Gamma^{q}_{hj}=\left(hj,k\right)g^{qk},\ \Gamma^{q}_{mj}=\left(mj,k\right)g^{qk},$$
$$\Gamma^{m}_{hj}=\left(hj,k\right)g^{mk},\ \Gamma^{q}_{mp}=\left(mp,k\right)g^{qk}$$

Al sustituir, se tiene:

$$\left(hs,jp\right)=g_{sq}R^{q}_{h,jp}=g_{sq}\left(\partial_{j}\left(hp,k\right)g^{qk}+\left(hp,k\right)g^{mk}\left(mj,k\right)g^{qk}\right)-$$
$$-g_{sq}\left(\partial_{p}\left(hj,k\right)g^{qk}+\left(hj,k\right)g^{mk}\left(mp,k\right)g^{qk}\right)=$$
$$=g_{sq}g^{qk}\left(\partial_{j}\left(hp,k\right)+\left(hp,k\right)g^{mk}\left(mj,k\right)\right)-g_{sq}g^{qk}\left(\partial_{p}\left(hj,k\right)+\left(hj,k\right)g^{mk}\left(mp,k\right)\right)=$$
$$=\partial_{j}\left(hp,s\right)-\partial_{p}\left(hj,s\right)+g^{ms}\left[\left(hp,s\right)\left(mj,s\right)-\left(hj,s\right)\left(mp,s\right)\right]$$

por definición de símbolos de Christoffel de 1ª especie ([1.3.1]):

$$\left(hp,s\right)=\frac{1}{2}\left[\partial_{h}g_{ps}+\partial_{p}g_{hs}-\partial_{s}g_{hp}\right]$$
$$\left(hj,s\right)=\frac{1}{2}\left[\partial_{h}g_{js}+\partial_{j}g_{hs}-\partial_{s}g_{hj}\right]$$

por tanto, al sustituir, se tiene, finalmente:

$$\left(hs,jp\right)=g_{sq}R^{q}_{h,jp}=\frac{1}{2}\left(\partial_{jh}g_{ps}+\partial_{ps}g_{hj}-\partial_{js}g_{hp}-\partial_{ph}g_{js}\right)+g^{ms}\left[\left(hp,s\right)\left(mj,s\right)-\left(hj,s\right)\left(mp,s\right)\right]$$

b) Expresión de la forma covariante de Riemann en un sistema localmente inercial. Simetrías

Por definición, un sistema es localmente inercial o geodésico si en él se anulan los símbolos de Christoffel. Sabemos, por el teorema 1.4.1, que los sistemas geodésicos existen. Si expresamos la forma covariante de Riemann en un sistema geodésico, su expresión será, por consiguiente, de la forma

$$\left(hs,jp\right)=g_{sq}R^{q}_{h,jp}=\frac{1}{2}\left(\partial_{jh}g_{ps}+\partial_{ps}g_{hj}-\partial_{js}g_{hp}-\partial_{ph}g_{js}\right)$$

De la que se deducen de inmediato las propiedades de simetría del tensor:

1) $\left(hs,jp\right)=\left(jp,hs\right)$

2) $\left(hs,jp\right)=-\left(jp,sh\right)=-\left(sh,jp\right)=\left(sh,pj\right)\rightarrow\left(hs,jj\right)=\left(hh,jp\right)=0$

3) $\left(hs,jp\right)+\left(hj,ps\right)+\left(hp,sj\right)=0$

Comprobemos, por ejemplo, la primera de ellas:

$$\left(hs, jp\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_{jh} g_{ps} + \partial_{ps} g_{hj} - \partial_{js} g_{hp} - \partial_{ph} g_{js}\right)$$
$$\left(jp, hs\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_{hj} g_{ps} + \partial_{sp} g_{jh} - \partial_{hp} g_{js} - \partial_{sj} g_{hp}\right)$$

Estas igualdades, por su carácter tensorial, no dependen del sistema de coordenadas elegido en la representación. El haber utilizado coordenadas geodésicas ha significado simplemente una reducción en la laboriosidad de los cálculos.

3.3. El número de símbolos de Riemann de 4 índices

La determinación del número total de símbolos de Riemann de cuatro índices y primera especie es bastante laboriosa, no obstante, utilizando las relaciones de simetría anteriormente descritas podemos reducir la dificultad de su cálculo.

Número de parejas de índices distintos: $\phi = \binom{n}{2}$

Número de combinaciones de dos parejas: $\varphi = \binom{\phi}{2} + \binom{\phi}{1}$ (los de dos parejas distintas más los de dos parejas iguales)

Finalmente habría que eliminar el número de relaciones 3), donde intervienen cuatro de los índices: $\varphi' = \binom{n}{4}$

El número total *N* de símbolos no nulos de 4 índices ha de ser, en definitiva, la diferencia $N = \varphi - \varphi'$.

Cálculo:

$$\phi = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \rightarrow \phi^2 = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4} \rightarrow \phi^2 + \phi = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4} + \frac{n(n-1)}{2} =$$
$$= \frac{n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n}{4} \rightarrow \frac{\phi^2 + \phi}{2} = \frac{n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n}{8}$$
$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{24}$$

por tanto, finalmente:

$$N = \varphi - \varphi' = \binom{\phi}{2} + \binom{\phi}{1} - \binom{n}{4} = \frac{\phi^2 + \phi}{2} - \binom{n}{4} = \frac{n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n}{8} -$$
$$- \frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{24} = \frac{2n^4 - 2n^2}{24} = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}$$

Número de símbolos de 4 índices:

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

Así, por ejemplo, en las variedades de Riemann bidimensionales, el nº de símbolos de 4 índices en la forma covariante de Riemann es:

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12} = \frac{2^2(2^2-1)}{12} = 1$$

Y en las variedades de Riemann tridimensionales:

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12} = \frac{3^2(3^2-1)}{12} = 6$$

4. Tensores obtenidos desde la forma covariante de Riemann

4.1. Tensor de Ricci. Curvatura escalar de Riemann

Desde el tensor de curvatura puede también definirse el tensor que aparece cuando el índice superior coincide con uno de los índices inferiores (contracción de índices):

$$R_{rp} = R^{j}_{r,jp}$$

Este tensor es conocido como *tensor de Ricci,* y queda expresado en función de la forma covariante de Riemann por:

$$R_{rp} = R^{j}_{r,jp} = g^{jk}\left(rk, jp\right)$$

Asimismo, cuando se contrae el tensor de Ricci mediante el tensor métrico se obtiene lo que llamamos *curvatura escalar de Riemann*:

$$R = g^{rp} R_{rp}$$

esta función escalar, definida en cada uno de los puntos de la variedad de Riemann, es, como sabemos, nula en los espacios euclidianos.

Se llama curvatura escalar de Gauss a la magnitud obtenida desde la curvatura escalar de Riemann por

$$K = \frac{R}{n(n-1)}$$

siendo n la dimensión del espacio.

Ejemplo de obtención del tensor de Ricci en función del tensor métrico y de la curvatura escalar en una variedad de dos dimensiones:

Por definición, es

$$R = g^{mk} R_{mk} \to g_{mk} R = g_{mk} g^{mk} R_{mk}$$

$$K = \frac{R}{n(n-1)} \wedge n = 2 \rightarrow K = \frac{R}{2.1} = \frac{R}{2}$$

De ser

$$(g_{mk}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \rightarrow (g^{mk}) = \begin{pmatrix} g_{22}/g & -g_{12}/g \\ -g_{21}/g & g_{11}/g \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow g_{mk}g^{mk} = g_{11}g^{11} + g_{12}g^{12} + g_{21}g^{21} + g_{22}g^{22} =$$

$$= \frac{1}{g}\left[g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12} - g_{21}g_{21} + g_{22}g_{11}\right] = \frac{1}{g}\left[(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) + (g_{22}g_{11} - g_{21}g_{12})\right] =$$

$$= \frac{2g}{g} = 2$$

Se tiene: $g_{mk}R = 2R_{mk} \rightarrow R_{mk} = \frac{R}{2}g_{mk}$, y también $K = \frac{R}{2} \rightarrow R_{mk} = Kg_{mk}$

La expresión del tensor de Ricci en función de la curvatura es, por tanto, en una variedad de dos dimensiones:

$$R_{mk} = \frac{R}{2}g_{mk} \qquad [4.1.1]$$
$$R_{mk} = Kg_{mk}$$

Donde es R la curvatura escalar de Riemann y K la curvatura escalar de Gauss.

Propiedad de simetría del tensor de Ricci:
Usando las propiedades de simetría de los símbolos de la forma covariante de Riemann, podemos establecer también la simetría del tensor de Ricci:

$$R_{is} = R^{a}_{i,as} = g^{ab}\left(ib,as\right) = g^{ba}\left(as,ib\right) = g^{ba}\left(sa,bi\right) = R_{si}$$

esto quiere decir que al permutar los dos subíndices del tensor, queda invariante.

4.2 Ejemplo de obtención de los tensores y elementos básicos en una variedad bidimensional de métrica esférica

Sea una variedad bidimensional cuya métrica viene dada por

$$\left(g_{ik}\right)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(bu) \end{pmatrix}$$

(b constante arbitraria)

Calculemos los elementos básicos y tensores:

a) El determinante de la matriz de Gramm:

$$g = \left|\left(g_{ik}\right)_2\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(bu) \end{vmatrix} = \cos^2(bu)$$

b) La matriz inversa de Gramm:

$$\left(g^{ik}\right)_2 = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} \cos^2(bu) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos^2(bu)}\begin{pmatrix} \cos^2(bu) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^{-2}(bu) \end{pmatrix}$$

c) El elemento diferencial de longitud:

$$ds^2 = g_{ik} du^2 dv^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(bu) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = du^2 + \cos^2(bu) dv^2$$

d) Los símbolos de Christoffel de 1ª especie:

De ser $(ij,k) = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right)$ y teniendo en cuenta que en la métrica dada:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(bu) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} g_{11} = 1 \\ g_{12} = g_{21} = 0 \\ g_{22} = \cos^2(bu) \end{cases}$$

Tenemos que:

$$(11,1) = 0,\quad (11,2) = 0,\quad (12,1) = 0,\quad (12,2) = -b\cos(bu)sen(bu),\quad (21,1) = 0$$
$$(21,2) = -b\cos(bu)sen(bu),\quad (22,1) = b\cos(bu)sen(bu),\quad (22,2) = 0$$

e) Los símbolos de Christoffel de 2ª especie:

De ser $\Gamma_{ij}^k = (ij,h)g^{kh}$ y teniendo en cuenta la matriz inversa de Gramm:

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^{-2}(bu) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} g^{11} = 1 \\ g^{12} = g^{21} = 0 \\ g^{22} = \cos^{-2}(bu) \end{cases}$$

Tenemos:

$$\Gamma_{11}^1 = (11,1)g^{11} + (11,2)g^{12} = 0$$
$$\Gamma_{11}^2 = (11,1)g^{21} + (11,2)g^{22} = 0$$
$$\Gamma_{12}^1 = (12,1)g^{11} + (12,2)g^{12} = 0$$
$$\Gamma_{12}^2 = (12,1)g^{12} + (12,2)g^{22} = -btg(bu)$$
$$\Gamma_{21}^1 = (21,1)g^{11} + (21,2)g^{12} = 0$$
$$\Gamma_{21}^2 = (21,1)g^{12} + (21,2)g^{22} = -btg(bu)$$
$$\Gamma_{22}^1 = (22,1)g^{11} + (22,2)g^{21} = b\cos(bu)sen(bu)$$
$$\Gamma_{22}^2 = (22,1)g^{21} + (22,2)g^{22} = 0$$

f) El tensor de curvatura de Riemann-Christoffel:

Puesto que es $R_{h,jp}^q = \partial_j \Gamma_{hp}^q + \Gamma_{hp}^m \Gamma_{mj}^q - \partial_p \Gamma_{hj}^q - \Gamma_{hj}^m \Gamma_{mp}^q$, los símbolos no nulos se obtienen fácilmente de los valores de los símbolos de Christloffel anteriores:

$$R^2_{1,12} = -R^2_{1,21} = -b^2$$
$$R^1_{2,12} = -R^1_{2,21} = b^2 \cos^2(bu)$$

g) La forma covariante de Riemann:

Siendo $(ij,rs) = g_{kj} R^k_{i,rs}$, podemos ver fácilmente que el único símbolo distinto de cero es

$$\left(12,12\right) = g_{2q} R^q_{1,12} = g_{21} R^1_{1,12} + g_{22} R^2_{1,12} = 0 + \cos^2(bu).(-b^2) = -b^2 \cos^2(bu)$$

h) El tensor de Ricci:

Es inmediato:

$$R_{11} = R^2_{1,21} = b^2$$
$$R_{22} = R^1_{2,12} = b^2 \cos^2(bu)$$

i) Las curvaturas escalares de Riemann y de Gauss:

Curvatura escalar de Riemann:

$$R = g^{mk} R_{mk} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = 1.b^2 + \cos^{-2}(bu) b^2 \cos^2(bu) = b^2 + b^2 = 2b^2$$

Curvatura escalar de Gauss:

$$K = \frac{R}{2(2-1)} = \frac{2b^2}{2} = b^2$$

j) Comprobación de que la métrica dada es esférica de radio (1/b):

Sabemos que la métrica esférica de radio r en una variedad bidimensional $V(\varphi, w)$ queda definida por una matriz del tipo:

$$(g_{ik})_2 = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$$

Vamos a ver a continuación que la matriz dada para nuestra variedad

$$(g_{ik})_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(bu) \end{pmatrix}$$

equivale a una matriz de métrica esférica con radio $1/b$, mediante un cambio de variables de la forma $\varphi = bu, \quad w = bv$:

En efecto, partiendo del elemento diferencial de longitud:

$$ds^2 = du^2 + \cos^2(bu) dv^2 = \left(\frac{1}{b}\right)^2 d\varphi^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 \cos^2 \varphi . dw^2 =$$

$$=\left(d\varphi, dw\right)\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{b}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{b}\right)^2 \cos^2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\varphi \\ dw \end{pmatrix} \to (g_{ik})_2 = \begin{pmatrix}\left(\frac{1}{b}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{b}\right)^2 \cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

que corresponde a una métrica esférica de radio $1/b$.

4.3. La identidad de Bianchi

Se verifica la identidad siguiente, conocida como *Identidad de Bianchi*:

$$\partial_t R^q_{i,rs} + \partial_r R^q_{i,st} + \partial_s R^q_{i,tr} = 0$$

Para comprobarlo, consideremos el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel:

$$R^q_{i,rs} = \partial_r \Gamma^k_{is} + \Gamma^m_{is}\Gamma^k_{mr} - \partial_s \Gamma^k_{ir} - \Gamma^m_{ir}\Gamma^k_{ms}$$

Como toda expresión tensorial no de pende del sistema de coordenadas que se utilice, vamos a representar el tensor de curvatura en un sistema de coordenadas geodésico, en el cual se anulan, por definición del sistema, los símbolos de Christoffel, y por tanto, se simplifica la expresión del tensor:

$$R^q_{i,rs} = \partial_r \Gamma^k_{is} - \partial_s \Gamma^k_{ir}$$

Derivamos respecto a la variable de índice t:

$$\partial_t R^q_{i,rs} = \partial_{rt} \Gamma^k_{is} - \partial_{st} \Gamma^k_{ir}$$

Permutamos índices:

$$\partial_r R^q_{i,ts} = \partial_{tr} \Gamma^k_{is} - \partial_{sr} \Gamma^k_{it}$$

$$\partial_s R^q_{i,tr} = \partial_{ts} \Gamma^k_{ir} - \partial_{rs} \Gamma^k_{it}$$

Sumamos las tres expresiones:

$$\partial_t R^q_{i,rs} + \partial_r R^q_{i,ts} + \partial_s R^q_{i,tr} = 2\partial_{rt} \Gamma^k_{is} - 2\partial_{rs} \Gamma^k_{it} = 2\left(\partial_{rt} \Gamma^k_{is} - \partial_{rs} \Gamma^k_{it}\right) = 2\partial_r \left(\partial_t \Gamma^k_{is} - \partial_s \Gamma^k_{it}\right) = 2\partial_r R^k_{i,ts}$$

o sea:

$$\partial_t R^q_{i,rs} + \partial_r R^q_{i,ts} + \partial_s R^q_{i,tr} = 2\partial_r R^k_{i,ts} \to \partial_t R^q_{i,rs} + \partial_r R^q_{i,ts} + \partial_s R^q_{i,tr} - 2\partial_r R^k_{i,ts} = 0 \to$$

$$\to \partial_t R^q_{i,rs} - \partial_r R^q_{i,ts} + \partial_s R^q_{i,tr} = 0$$

y, finalmente, por la propiedad de cambio de signo al permutar los subíndices t y s en el segundo sumando:

$$\partial_t R^q_{i,rs} + \partial_r R^q_{i,st} + \partial_s R^q_{i,tr} = 0$$

Mediante el uso de esta identidad, puede probarse un teorema simple, pero de consecuencias importantes en la expresión de las ecuaciones de campo de la relatividad general.

Teorema: Sea R la curvatura escalar de Riemann y sea R_j^k el tensor contraído de Ricci mediante el tensor métrico, esto es $R_j^k = g^{ik} R_{ij}$. Se verifica que:

$$D_k R_j^k = \frac{1}{2} \partial_j R$$

Demostración:
Si en la identidad de Bianchi hacemos $q = r = a$:

$$\partial_t R^q_{i,rs} + \partial_r R^q_{i,st} + \partial_s R^q_{i,tr} = 0 \rightarrow \partial_t R^a_{i,as} + \partial_a R^a_{i,st} + \partial_s R^a_{i,ta} = 0 \rightarrow \partial_t R_{is} + \partial_a R^a_{i,st} - \partial_s R^a_{i,at} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \partial_t R_{is} + \partial_a R^a_{i,st} - \partial_s R_{it} = 0$$

Introducimos ahora la forma covariante en el segundo de los sumandos:

$$\partial_t R_{is} + \partial_a g^{ab} \left(ib, st \right) - \partial_s R_{it} = 0$$

si, con objeto de contraer uno de los tensores de Ricci que figuran en la expresión, multiplicamos toda la expresión por g^{it} y tenemos en cuenta que por un resultado anterior es $D_t g^{it} = 0$, se tiene:

$$\partial_t g^{it} R_{is} + \partial_a g^{ab} g^{it} \left(ib, st \right) - \partial_s g^{it} R_{it} = 0$$

por tanto:

$$\partial_t R^t_s + \partial_a g^{ab} R^t_{b,st} - \partial_s R = 0 \rightarrow \partial_t R^t_s - \partial_a g^{ab} R^t_{b,ts} - \partial_s R = 0 \rightarrow \partial_t R^t_s + \partial_a g^{ab} R_{bs} - \partial_s R = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \partial_t R^t_s + \partial_a R^a_s - \partial_s R = 0 \rightarrow 2\partial_a R^a_s - \partial_s R = 0 \rightarrow \partial_a R^a_s = \frac{1}{2} \partial_s R$$

4.4. El tensor de Einstein. Espacios de Einstein

4.4.1. El tensor de Einstein:
Denominamos *tensor de Einstein* a un tensor covariante de segundo orden obtenido desde el tensor de Ricci mediante la expresión:

$$E_{is} = R_{is} - \frac{1}{2} R.g_{is}$$

y que, obviamente, podemos expresar como un tensor mixto de segundo orden por:

$$E_s^k = g^{ik} E_{is}$$

(R_{is} es el tensor de Ricci y es R la curvatura escalar de Riemann)

Es inmediato que en las variedades de bidimensionales de Riemann, el tensor de Einstein es nulo:

De [4.1.1]: $R_{is} = \dfrac{R}{2} g_{is}$

Por tanto: $E_{is} = R_{is} - \dfrac{1}{2} R.g_{is} = \dfrac{R}{2} g_{is} - \dfrac{1}{2} R.g_{is} = 0$

Teorema: La derivada covariante del tensor mixto de Einstein es nula.
Demostración:

$$D_a E_s^a = D_a\left(g^{ia} E_{is}\right) = D_a\left(g^{ia}(R_{is} - \frac{1}{2} R g_{is})\right) = D_a\left(g^{ia} R_{is} - \frac{1}{2} R g^{ia} g_{is}\right) =$$

$$= D_a\left(R_s^a - \frac{1}{2} R \delta_s^a\right) = D_a R_s^a - \frac{1}{2} D_s R = \frac{1}{2}\partial_s R - \frac{1}{2}\partial_s R = 0$$

4.4.2. Espacios de Einstein:

Se define un Espacio de Einstein como una variedad de Riemann en donde el tensor de Ricci es el producto de una función escalar por el tensor métrico:

$$R_{is} = \phi g_{is}$$

En los espacios de Riemann de dos dimensiones sabemos que se verifica que el tensor de Ricci es

$$R_{is} = \frac{1}{2} R g_{is}$$

Siendo R la curvatura escalar de Riemann. Esto nos muestra que las variedades de Riemann de dos dimensiones son casos particulares de espacios de Einstein

4.4.3. Expresión de los tensores de Ricci y Einstein en un espacio de Einstein:
De la definición de la curvatura escalar de Riemann se tiene, en una variedad n dimensional:

$$R = g^{is} R_{is} = g^{is}\phi g_{is} = \phi g^{is} g_{is} = \phi n \to \phi = \frac{R}{n}$$

y la expresión del tensor de Ricci es inmediata:

$$R_{is} = \frac{1}{n} R g_{is}$$

Con lo cual la expresión del tensor de Einstein también se obtiene de inmediato:

$$E_{is} = R_{is} - \frac{1}{2} R.g_{is} = \frac{1}{n} R g_{is} - \frac{1}{2} R.g_{is} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) R g_{is}$$

En definitiva:

Tensor de Ricci: $R_{is} = \frac{1}{n} R g_{is}$

Tensor de Einstein: $E_{is} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) R g_{is}$

Teorema: En todo espacio de Einstein, de dimensión n>2, la curvatura escalar de Riemann es constante:
Demostración:
Consideremos el tensor mixto de Ricci en un espacio de Einstein:

$$R_s^a = g^{ia} R_{is} = \frac{1}{n} R g^{ia} g_{is} = \frac{1}{n} R \delta_s^a$$

se tiene, al derivar: $\partial_a R_s^a = \frac{1}{n}\partial_s R$, y como en toda variedad de Riemann es:

$\partial_a R_s^a = \frac{1}{2}\partial_s R$, se tiene que $\frac{1}{n}\partial_s R - \frac{1}{2}\partial_s R = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)\partial_s R = 0 \rightarrow \partial_s R = 0 \rightarrow R = cte$

4.4.4. El teorema de Schur

Este teorema afirma que en toda variedad de Riemann en la que se verifiquen, para alguna función escalar ϕ, las igualdades

$$(ij,rs) = \phi(g_{ir}g_{js} - g_{jr}g_{is})$$

entonces tal variedad es un espacio de Einstein y la función escalar ϕ viene dada por

$$\phi = -\frac{R}{n(n-1)}$$

siendo *R* la curvatura escalar de Riemann.

Demostración:

De la hipótesis, se tiene:

$$(ij,rs) = \phi(g_{ir}g_{js} - g_{jr}g_{is}) \rightarrow R^a_{i,rs} = g^{aj}(ij,rs) = \phi(g_{ir}g^{aj}g_{js} - g^{aj}g_{jr}g_{is})$$

y el tensor de Ricci (haciendo a=r):

$$R_{is} = R^r_{i,rs} = g^{rj}(ij,rs) = \phi(g_{ir}g^{rj}g_{js} - g^{rj}g_{jr}g_{is}) = \phi(\delta_i^j g_{js} - g^{rj}g_{jr}g_{is}) = \phi(g_{is} - ng_{is})$$

aclaremos el último paso:

$$\phi(\delta_i^j g_{js} - g_{is}) = \phi(\delta_i^1 g_{1s} - g_{is}) + \phi(\delta_i^2 g_{2s} - g_{is}) + \ldots + \phi(\delta_i^i g_{is} - g_{is}) + \ldots + \phi(\delta_i^n g_{ns} - g_{ns}) =$$

$$= \phi(0 - g_{is}) + \phi(0 - g_{is}) + \ldots + \phi(g_{is} - g_{is}) + \ldots + \phi(0 - g_{ns}) = \phi(g_{is} - ng_{is})$$

En definitiva:

El tensor de Ricci es $R_{is} = \phi(g_{is} - ng_{is}) = \phi(1-n)g_{is} \rightarrow$ la variedad es espacio de Einstein

Y como en los espacios de Einstein se verifica que $R_{is} = \frac{1}{n}Rg_{is}$:

$$\phi(1-n)g_{is} = \frac{1}{n}Rg_{is} \rightarrow \phi = -\frac{R}{n(n-1)}g_{is}$$

o bien:

$$\phi = -Kg_{is}$$

(K: curvatura escalar de Gauss)

5. Bibliografía

Bibliografía:

1. Lichnerowicz, A.: Elementos de cálculo tensorial, Aguilar (1972). Un libro imprescindible sobre el tema.
2. Levi-Civita, T.: Der absolute Diferentialkak¸l, Springer (1928). Libro histórico para aficionados.
3. Cartan, E.: Lesons sur la géometrie des espaces de Riemann, Gauthier Villars (1946). Es otro libro histórico.
4. Lawden, D.F.: An introduction to tensor calculus, relativity and cosmology, Wiley (1986). Enfocado a la Relatividad General.
5. Anderson, J. L.: Principles of relativity physics, Academic Press (1967). Al igual que el anterior, se centra en la relatividad general.
6. González de Posada, F.: Problemas de análisis tensorial, Copygraph (1972.