ALGUNAS VINCULACIONES DE LAS SERIES DE FOURIER CON LAS FUNCIONES SENOIDALES ASINCRÓNICAS

Dante E. Wojtiuk

Introducción

Este trabajo comenta las relaciones existentes entre las Series de Fourier con las Funciones Senoidales Asincrónicas (**FAS**). Es consecución del trabajo presentado anteriormente a modo de introducción haremos una breve síntesis de las principales características de las **FAS**:

(Ver "Funciones Senoidales Asincrónicas", en esta misma web: ***http://personales.ya.com/casanchi/mat/asincronicas01.htm****)*

Definición:

Sea:

$$f_{(k_1,C_1)}(x) : \Re \rightarrow \Re \,/\, f_{(k_1,C_1)}(x) = C_1 \cos(xk_1)$$

$$f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x) : \Re \rightarrow \Re \,/\, f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x) = C_1 \cos(xk_1) + C_2 \cos(xk_2)$$

...

$$f_{(k_1,..,k_n,C_1,..,C_n)}(x) : \Re \rightarrow \Re \,/\, f_{(k_1,..,k_n,C_1,..,C_n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cos(xk_i)$$

A la que se llamará función **asincrónica suma (fa+),** de orden **n**. Simplemente Función Senoidal Asincrónica (**FAS**)

Los expresiones **k** y **C** son constantes, es decir, no varían en la evolución de la secuencia.

Para todos los casos:

$$x\,,\,k\,,\,C \in \Re\;;$$
$$C \neq 0\;;$$
$$k \neq 0\;;$$
$$k_{i+1} \neq k_i + 2s\pi\;;$$
$$s \in Z\;;$$
$$n \in N\;;$$

Es decir, es una suma asincrónica de funciones senoidales (o cosenoidales) cuyas frecuencias son asincrónicas, es decir, la suma de tales senoides no es periódica.

Generalidades

No hay – hasta el momento de la presentación de mi trabajo anterior - teoría que haya abordado esta posibilidad, las series de Fourier (*como todo el análisis armónico*) presupone una base ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$ o equivalente, con lo cual la llamada *'descomposición en frecuencias'* siempre presupone una extensión en periodicidad de la función origen.

Gráficamente:

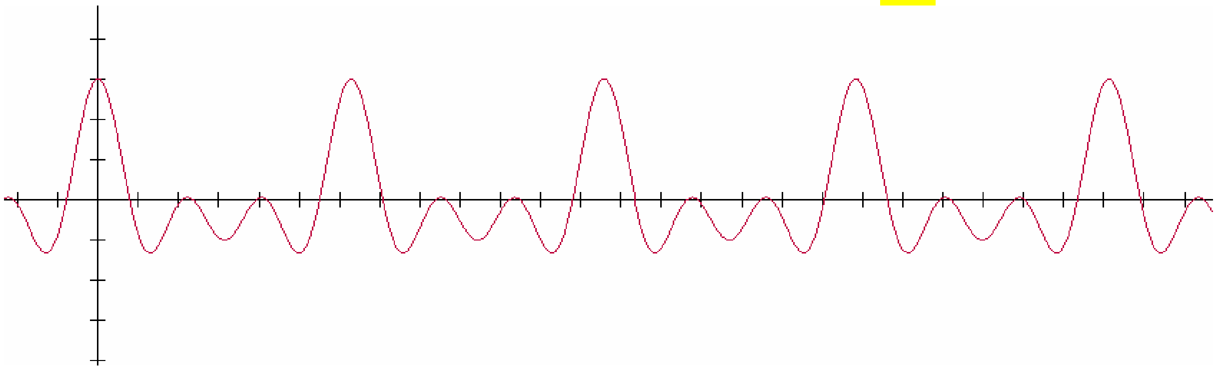
Sea una Serie de Fourier[1] definida por

$$y = f_{(k_1,k_2,k_3,C_1,C_2,C_3)}(x) : \Re \rightarrow \Re \,/\, f_{(k_1,k_2,k_3,C_1,C_2,C_3)}(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} C_i \cos(xk_i)$$

Con valores: $\begin{array}{l} C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 1; \\ k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3 \end{array}$,

Lo que genera la serie de Fourier de semionda:

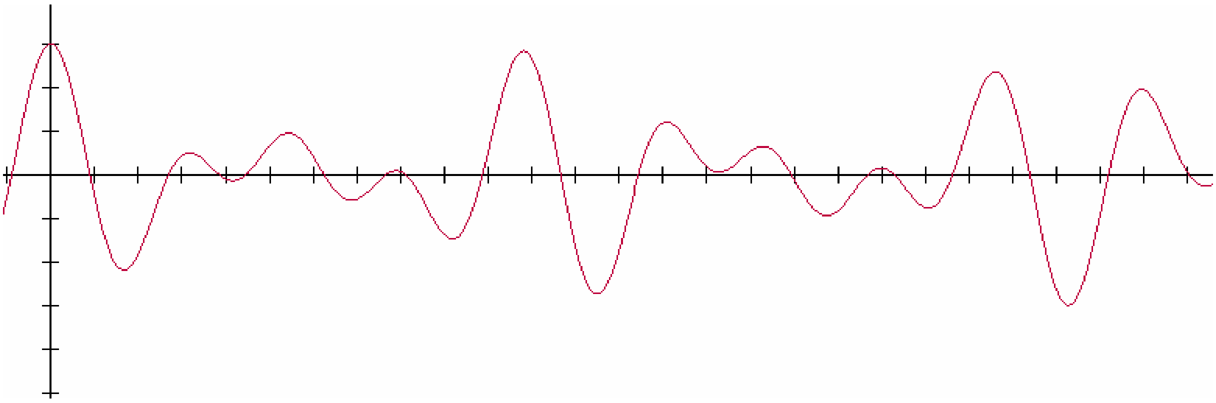
$$y = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$$ <1>



Vemos fácilmente que esto es una función periódica, en la medida que se agregan frecuencias (múltiplos de una fundamental) se puede ir aproximando a cualquier *'forma'*, una onda cuadrada, triangular, etc...

[1] En este trabajo consideraremos series reales exclusivamente

En cambio, la **FAS** $y = \cos(1.21x) + \cos(1.75x) + \cos(2.3x)$



Ya **no** es periódica (aunque sus sumandos si lo sean)

En el trabajo anterior[2] se demuestra que teniendo un muestreo equidistante de $\{4n^2\}$ muestras, se pueden acotar los generadores k_i [3]

$$\begin{cases} \dfrac{\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x+m,+)} - M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right|}{\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right|} = 4^n \prod_{i=1}^{n} \sin^2\left[\dfrac{mk_i}{2}\right] \\ \dfrac{\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x+m,+)} + M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right|}{\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right|} = 4^n \prod_{i=1}^{n} \cos^2\left[\dfrac{mk_i}{2}\right] \end{cases}$$

Siendo $M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)}$ la Matriz Senoidal Asincrónica (**MAS**), es decir la aplicación de la secuencia de la **FAS** de orden **n** al espacio matricial, a saber:

$$M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} = \begin{bmatrix} f_{(k_1,..k_n,C_1,..C_n)}(x) & . \; . \; . & . \\ f_{(k_1,..k_n,C_1,..C_n)}(x+1) & . \; . \; . & . \\ f_{(k_1,..k_n,C_1,..C_n)}(x+2) & . \; . \; . & . \\ . & . \; . \; . & . \\ . & . \; . \; . & f_{(k_1,..k_n,C_1,..C_n)}(x+2nj+i-2n-1) \end{bmatrix}^{2n\times 2n}$$

Para **FAS** de órdenes mayores a 2, por lo general, el valor de los generadores no es deducible por métodos algebraicos.

---

[2] Funciones Senoidales Asincrónicas
[3] Presenta cierta analogía con el principio de incertidumbre de Heisemberg

Actualmente, se trabaja en una teoría de la aproximación para convertir esta propiedad en un algoritmo, para lo cual se utilizan una batería de métodos.

Lo que se quiere destacar aquí es que estas propiedades son validas para las Series de Fourier, a condición que las frecuencias sean consistentes con el muestreo.

Volvamos al ejemplo **<1>**, tomemos ***cualquier*** muestreo de por los menos **36** valores, ya que $36 = \{4n^2\}$, y desplacemos ese muestreo una vez.

Veámoslo paso a paso:

a) la primera **MAS** se conforma así

$$M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x) & \\ \cos(x+1)+\cos[2(x+1)]+\cos[3(x+1)] & \\ \cos(x+2)+\cos[2(x+2)]+\cos[3(x+2)] & \\ \cos(x+3)+\cos[2(x+3)]+\cos[3(x+3)] & \\ \cos(x+4)+\cos[2(x+4)]+\cos[3(x+4)] & \\ \cos(x+5)+\cos[2(x+5)]+\cos[3(x+5)] & \cos(x+35)+\cos[2(x+35)]+\cos[3(x+35)] \end{bmatrix}^{2n\times 2n}$$

b) la segunda es una muestra desplazada

$$M^{2n\times 2n}{}_{(f,x+1,+)} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(x+1)+\cos[2(x+1)]+\cos[3(x+1)] & \\ \cos(x+2)+\cos[2(x+2)]+\cos[3(x+2)] & \\ \cos(x+3)+\cos[2(x+3)]+\cos[3(x+3)] & \\ \cos(x+4)+\cos[2(x+4)]+\cos[3(x+4)] & \\ \cos(x+5)+\cos[2(x+5)]+\cos[3(x+5)] & \\ \cos(x+6)+\cos[2(x+6)]+\cos[3(x+6)] & \cos(x+36)+\cos[2(x+36)]+\cos[3(x+36)] \end{bmatrix}^{2n\times 2n}$$

Finalmente se realizan las operaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x+m,+)} - M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|}{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|} = 4^n \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \sin^2\left[\frac{mk_i}{2}\right] \\ \dfrac{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x+m,+)} + M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|}{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|} = 4^n \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \cos^2\left[\frac{mk_i}{2}\right] \end{cases}$$

Tal cual puede comprobarse en la sencilla *planilla Excel adjunta a este trabajo* (http://personales.ya.com/casanchi/mat/fas_3.xls)

El corolario fundamental es este[4]:

Las series de Fourier son subespacios de las Funciones Senoidales Asincrónicas

Las aplicaciones de tal conclusión superan las posibilidades de este trabajo.

Simplemente se mencionan la ponderación de componentes en cualquiera de los algoritmos incluyentes de Series y Transformadas de Fourier.

Dante E. Wojtiuk
dantewo@ciudad.com.ar
Buenos Aires, Argentina
20 de Octubre de 2007

[4] Una primera impresión parecería restringir esta proposición a las Series de Fourier de semionda, pero no es así, puede ser una combinación de senos y cosenos, (puede verificarse fácilmente a cualquier valor asincrónico)