

## **Yuri Vladimirovich Matiyasevich, de los algoritmos diofánticos al décimo problema de Hilbert**

Este matemático nació el año 1947 en Leningrado, URSS. Su padre, Vladimir Mikhailovich Matiyasevich, era ingeniero de la construcción, y aunque no participaba en aspectos prácticos de la construcción, desarrollaba su trabajo en la elaboración y diseño de planos y maquetas. El padre de Vladimir había sido soldado profesional. La madre de Yuri, Galina Korotchenko, había querido ser doctora, pero hubo de prepararse como agrónoma, en contra de sus deseos. Acabó abandonando estos estudios que no cumplían sus expectativas. Durante el periodo de la guerra, y hasta el nacimiento de su hijo Yuri, trabajó como mecanógrafa del ejército. Se dedicaría entonces a criar a su hijo, un niño tardío, pues al nacer, Galina tenía ya 36 años y Vladimir, su padre, cuarenta y cinco.

Se crió en Leningrado, donde comenzó su educación en 1954. De pequeño tuvo problemas de salud y estuvo en el hospital en dos ocasiones para ser operado. Ya había aprendido entonces a sumar grandes cantidades, y estando en el hospital una enfermera le enseñaría también a restar grandes números.

Durante estos años, Yuri asistió a lo que él denominaba "dos escuelas muy buenas con énfasis adicional en matemáticas y física". La primera de estas escuelas fue el Liceo de Leningrado 239, en el que se graduaría durante el año 1963, desarrollando en esta escuela, desde 1959, su pasión por construir radios. Este año, precisamente, fue el del fallecimiento de su padre, quedando la familia con dificultades económicas importantes. Pronto, sin embargo, Yuri Matiyasevich comenzó a participar en competiciones de Olimpiadas Matemáticas, con mucho éxito.

Desde el Liceo de Leningrado 239 se trasladó a Moscú donde pasó un año en el internado A.N. Kolmogorov, internado físico-matemático nº 18, adscrito a la Universidad Estatal de Moscú. La estancia en Moscú había sido bastante difícil para él, pues tuvo que dejar sola a su madre; sin embargo aprovecharía el ofrecimiento de ayuda financiera de su tío, que vivía en Moscú. Yuri Matiyasevich había mostrado sus sobresalientes habilidades matemáticas durante su estancia en Leningrado, ya que había tenido gran éxito en las Olimpiadas Matemáticas de Leningrado entre los años 1960 y 1963, y también en las Olimpiadas Matemáticas de la Unión en esos mismos años. Después, durante su estancia en el internado en Moscú, fue igualmente exitoso en la Olimpiada Matemática de Moscú de 1964, así como en la Olimpiada Matemática de la Unión de ese año. Recibió una medalla de oro en la Olimpiada Internacional de Matemáticas celebrada en Moscú en 1964.

Su excelente actuación en la Olimpiada Matemática Internacional de 1964 no solo le dio un gran reconocimiento, sino que también tuvo el efecto práctico de permitirle ingresar directamente en el Departamento de Matemáticas y Mecánica de la Universidad Estatal de Leningrado sin tener que realizar ningún examen, y con un año de adelanto, superando así el último año de su educación escolar básica.

[2]:

... al comienzo de su segundo año, otoño de 1965, Matiyasevich conoció los sistemas canónicos de Emil Post (1897-1954) y comenzó su carrera como matemático. Inmediatamente logró un resultado elegante en un problema difícil que propuso el profesor. Esto lo llevó a conocer a Maslov, el experto local en los sistemas canónicos de E. Post. ... Maslov hizo una serie de sugerencias para la investigación, que Matiyasevich resolvería rápidamente. A finales de 1965, Maslov sugirió una pregunta más difícil sobre los detalles de la falta de viabilidad de los sistemas de Axel Thue (1863-1922). Matiyasevich resolvió también este problema. (B Yandell, The honors class: Hilbert's problems and their solvers (A K Peters, 2002))



Se graduó en 1969 y continuó su preparación para su título de Candidato (equivalente a un doctorado) en el Departamento de Leningrado del Instituto de Matemáticas Stelkov de la Academia de Ciencias de la URSS, con Sergei Maslov como su asesor. Mientras estudiaba, ya había publicado algunos artículos importantes (todos en ruso): *Simple examples of unsolvable canonical calculi* (1967), *Simple examples of unsolvable associative calculi* (1967), *Arithmetic representations of powers* (1968), *A connection between systems of word and length equations and Hilbert's tenth problem* (1968). Este último tendrá una importante repercusión en su trabajo posterior. Efectivamente, antes de continuar describiendo la carrera de Matiyasevich, deberíamos ver brevemente el llamado "Décimo Problema de Hilbert".

En 1900, en el Congreso Internacional de Matemáticos, en París, David Hilbert propuso establecer la agenda de la investigación matemática para el nuevo siglo dando una lista de 23 problemas. Consideró que los esfuerzos para resolver estos problemas conducirían a avances importantes. De hecho, durante su charla en el Congreso discutió solo diez de los problemas, pero la lista completa de 23 se discute en el documento que presentó en las Actas del Congreso. El Décimo Problema, que nos interesa aquí, no fue de hecho uno de los diez que Hilbert discutió en su charla. El problema, tal como lo plantea David Hilbert, es bastante diferente de la manera en la que generalmente se lo menciona hoy, así que veamos ambos aspectos.

El problema original es:

*Idee un proceso según el cual pueda determinarse mediante un número finito de operaciones si una ecuación polinómica dada con coeficientes enteros con cualquier número de incógnitas se puede resolver en enteros racionales.*

La declaración más moderna sería:

*¿Existe un algoritmo para determinar si una ecuación diofántica tiene solución en números naturales?*

Las diferencias en estas dos declaraciones son significativas. Hilbert creía que existía un algoritmo (es decir, un proceso determinado por un número finito de operaciones) y que el problema era encontrarlo. La segunda versión requiere la teoría general de la computación fundada por Gödel, Church, Turing y otros en la década de 1930 antes de que tuviera sentido preguntar si existe un algoritmo para

resolver un problema en particular. El hecho de que la segunda declaración solicite una solución en números naturales mientras que la primera pregunta por una solución en números enteros no es significativa. Son equivalentes usando el teorema que Lagrange probó en 1772, es decir, que cada número natural se puede expresar como la suma de los cuadrados de cuatro enteros.

En 1934, Thoralf Skolem (1887-1963) demostró que para resolver el Décimo Problema de Hilbert, es suficiente considerar solo ecuaciones diofánticas de grado cuatro. Martín Davis (1928-) hizo avances en 1953 y continuó investigando el problema con Hilary Putnam (1926-2016) y Julia Robinson (1919-1985). De hecho, Julia Robinson continuó avanzando para demostrar que no existía ningún algoritmo, publicando un artículo importante en 1952. Matiyasevich se interesó en el Décimo Problema de Hilbert cuando era un estudiante universitario, en su segundo año de estudio. Maslov le aconsejó que no leyera los documentos de "los matemáticos estadounidenses" y progresó un poco, publicando sus resultados en los documentos que mencionamos anteriormente. Luego leyó los documentos de Martin Davis, Hilary Putnam y Julia Robinson y organizó un seminario sobre el Décimo Problema de Hilbert. Su fascinación por el problema era tal que persistió en su investigación a pesar de que sus maestros y compañeros se burlaban de él. Dijo en una entrevista de noviembre de 1999 (ver [6], ver también [1]):

*Un profesor comenzó a reírse de mí. Cada vez que nos encontrábamos, me preguntaba: "¿Has probado la falta de solvencia del décimo problema de Hilbert? ¿Todavía no?. Pues entonces no podrás graduarte en esta universidad".*

Eventualmente, decidió que tendría que olvidarse del Décimo Problema de Hilbert y concentrarse en otros problemas para obtener su Grado de Candidato. Sin embargo (ver [6] y también [1]):

*... un día en el otoño de 1969, algunos de mis colegas me dijeron, "apresúrense a la biblioteca. ¡En el último número de Proceedings of the American Mathematical Society hay un nuevo artículo de Julia Robinson!". Pero fui firme en dejar a un lado el décimo problema de Hilbert. Me dije a mí mismo: "Está bien que Julia Robinson continúe con el problema, pero no puedo perder mi tiempo en eso". Así que no corrí a la biblioteca. Pero en algún lugar del cielo matemático debe haber un dios o una diosa de las matemáticas que no me permitió dejar de leer el nuevo trabajo de Julia Robinson. Debido a mis primeras publicaciones sobre el tema, me consideraban especialista en el décimo problema, por lo que me enviaron el documento para su revisión. Así que me ví obligado a leer el artículo de Julia Robinson, y el décimo problema de Hilbert me capturó de nuevo. Vi de inmediato que Julia Robinson tenía una idea fresca y maravillosa. Estaba conectada con la forma especial de la ecuación de Pell.*



Julia Robinson y Yuri Matiyasevich

Las nuevas ideas plasmadas en el artículo de Julia Robinson "Problemas sin soluciones diofánticas" (1969) significó para Matiyasevich que podría intentar un nuevo enfoque para demostrar que no existía ningún algoritmo (ver [6] y [1]):

*En la mañana del 3 de enero de 1970 creí que tenía una solución para el décimo problema de Hilbert, pero al final de ese día descubrí un defecto en mi trabajo. Pero a la mañana siguiente logré reparar la construcción. ... Escribí una prueba detallada*

sin encontrar ningún error y pedí a Sergei Maslov y Vladimir Lifshitz que lo revisaran, pero que no dijera nada al respecto a nadie más. Había planeado pasar las vacaciones de invierno con mi novia en un campamento de esquí, así que me fui de Leningrado antes de obtener el veredicto de Maslov y Lifshitz. Durante quince días estuve esquiando, simplificando mi prueba y escribiendo el diario. ... A mi regreso a Leningrado, recibí la confirmación de que mi prueba era correcta y que ya no era un secreto. Otros matemáticos también verificaron la prueba, incluyendo a Dimitri K, Faddeev (1907-1989) y AA Markov, ambos famosos por su habilidad para encontrar errores.

El documento que escribió, *The Diophantineness of enumerable sets* (en ruso), se publicaría en 1970. JWS Cassels (1922-2015) escribió:

*Este trabajo muestra que cada relación recursivamente enumerable es diofántica y de ese modo completa la solución del décimo problema de Hilbert en sentido negativo. ... La prueba es elemental pero ingeniosa y parece ser que usa algunas ideas de Julia Robinson...*

Matiyasevich también publicó "Solución del décimo problema de Hilbert" en húngaro, en 1970.

Resolver un problema de la famosa lista de Hilbert lo llevó de inmediato al puesto de uno de los principales investigadores del mundo en matemáticas. Obtuvo su título de Candidato en 1970 y fue nombrado investigador en el Departamento de Leningrado del Instituto Steklov de Matemáticas de la Academia de Ciencias de la URSS. Se le otorgó el premio "Joven matemático" de la Sociedad de Matemáticas de Leningrado en ese mismo año y recibió el reconocimiento mundial cuando presentó su resultado durante su conferencia "Representación diofántica de predicados recursivamente enumerables" en el Congreso Internacional de Matemáticos de Niza, en agosto de 1970. En 1972 obtuvo su doctorado por su tesis "Representación diofántica de predicados enumerables" que defendió el 24 de febrero. En esta tesis, además de proporcionar una prueba simplificada de que no existe ningún algoritmo para determinar si las ecuaciones diofánticas tienen soluciones enteras, dio una representación diofántica de una amplia clase de secuencias numéricas naturales producidas por relaciones de recurrencia lineal. También construyó un polinomio particular de grado 21 con 21 variables que tiene como rango positivo precisamente el conjunto de números primos.



Dos años más tarde, en 1974, fue promovido a Investigador Senior. Durante estos años, Matiyasevich mantuvo correspondencia con Julia Robinson y ambos emprendieron juntos proyectos de investigación conjunta. Esto era mucho más difícil de lo que parece, ya que la guerra fría significaba que todas sus cartas eran examinadas por los censores soviéticos. Se conocieron por primera vez en el Congreso Internacional de Lógica, Metodología y Filosofía de las Ciencias celebrado en Bucarest, Rumania, en 1971, donde Matiyasevich pronunció la conferencia *sobre la falta de solvencia recursiva del décimo problema de Hilbert* en el que describió el trabajo conjunto que había estado llevando a cabo con Julia Robinson. En 1980 Matiyasevich fue nombrado jefe del Laboratorio de Lógica Matemática en el Departamento de Leningrado del Instituto Steklov. En 1995 también fue nombrado profesor de Ingeniería de Software en la Universidad Estatal de San Petersburgo (Leningrado había vuelto a su nombre original de San Petersburgo en 1991). Más tarde fue nombrado para la cátedra de Álgebra y teoría de números

Matiyasevich publicó el libro *El décimo problema de Hilbert* en ruso en 1993 y, en el mismo año, se publicó una traducción al inglés. También se publicaría una traducción al francés en 1995. Cristian Calude escribe en una reseña de la traducción al inglés:

*El libro está dividido en diez capítulos. Los primeros cinco conducen a la solución negativa del décimo problema de Hilbert; los capítulos restantes están dedicados a diversas aplicaciones del método utilizado por el autor, que es, en cierto sentido, más importante que la solución misma: tiene aplicaciones para el octavo problema de Hilbert, problemas de decisión en teoría de números, complejidad diofántica, problemas en cálculo y juegos diofánticos. ... El libro está bien escrito. Será de gran valor no solo para los lectores directamente interesados en el Décimo Problema de Hilbert, sino, en un sentido más amplio, para los usuarios potenciales de algunas eficientes codificaciones diofánticas.*

Valentina Harizanov escribe [ver referencia 5]:

*Este libro es excepcional en el sentido de que todas sus partes son interesantes e importantes, no solo su texto, sino también sus ejercicios, sus comentarios, su apéndice y su prólogo a la traducción al inglés.*

Permítasenos dar detalles breves de un trabajo más reciente de Matiyasevich. En 2004 publicó *Eliminación de cuantificadores a partir de fórmulas aritméticas que definen conjuntos recursivamente enumerables*, que resume de la siguiente manera:

*Esta es una breve encuesta de resultados conocidos sobre la eliminación de cuantificadores sobre números naturales, y algunas implicaciones de estos resultados en el ámbito de los sistemas de álgebra computarizada.*

También en 2004 publicó *Algunas reformulaciones probabilísticas de la conjetura de los cuatro colores*, en donde mostró que la conjetura de los cuatro colores se puede replantear como un pequeño número de afirmaciones sobre correlaciones de algunos eventos aleatorios. Estos eventos aleatorios se definen en un espacio probabilístico asociado a una triangulación de una esfera. Su trabajo de *Aritmetización existencial de ecuaciones diofánticas* (2009) continúa el trabajo relacionado con el décimo problema de Hilbert y, como escribe Alexandra Shlapentokh:

*... continúa su investigación de los métodos de codificación mediante la introducción de un esquema de codificación que, entre otras cosas, conduce a la eliminación de cuantificadores delimitados, la aritmetización de las máquinas de Turing y una construcción muy simplificada de una ecuación diofántica universal.*

En 2010 publicó *Una reformulación probabilística más de la conjetura de los cuatro colores* que continúa la investigación descrita en el artículo anterior de 2004.

De los numerosos honores otorgados a Matiyasevich, mencionamos que fue galardonado con el Premio AA Markov de la Academia de Ciencias de la URSS (1980); asimismo obtuvo un doctorado honorario por la universidad d'Auvergne (1996); fue elegido miembro correspondiente de la Academia Rusa de Ciencias (1997); se le concedió el Premio Humboldt Research Award a Outstanding Scholars (1998); fue elegido vicepresidente de la Sociedad Matemática de San Petersburgo (1998); galardonado también con un doctorado honorario por l'Université Pierre et Marie Curie en París (2003); elegido para la Academia de Ciencias de Baviera (2007); y elegido como miembro de pleno derecho de la Academia Rusa de Ciencias (2008). Es miembro de los consejos editoriales de *Discrete Mathematics and Applications* y de *Computer Instruments in Education*.

**Basado en el artículo de JJ O'Connor y EF Robertson**  
**<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Matiyasevich.html>**  
**casanchi.com**

## **Referencias**

### **Libros:**

1. C Reid, *Julia. Una vida en matemáticas* (La Asociación matemática de América, 1996).
2. B Yandell, *La clase de honor: los problemas de Hilbert y sus solucionadores* (AK Peters, 2002).

### **Artículos:**

3. M Davis, Review: décimo problema de Hilbert por Yuri V Matiyasevich, *Amer. Mates. Mensual* **102**(4) (1995), 366-369.
4. C Dimitracopoulos, Review: décimo problema de Hilbert por Yuri V Matiyasevich, *Journal of Symbolic Logic* **62** (2) (1997), 675-67.
5. V Harizanov, Review: décimo problema de Hilbert por Yuri V Matiyasevich, *Modern Logic* **5** (3) (1995), 345-355.
6. Y Matiyasevich, Mi colaboración con Julia Robinson, *The Mathematical Intelligencer* **14** (4) (1992), 38-45.
7. Y Matiyasevich, Mi colaboración con Julia Robinson (francés), *Gazette des Mathématiciens* **59**(1994), 27-44.
8. Y Matiyasevich, el décimo problema de Hilbert: ecuaciones diofánticas en el siglo XX, en *eventos matemáticos del siglo XX* (Springer, Berlín, 2006), 185-213.