LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN

1. Introducción:

Existe una cierta función en variable compleja que tiene una especial relevancia en el quehacer matemático de todo el siglo XX e, inclusive, la sigue teniendo en nuestros días.

Esta función especial es la llamada "Función Zeta de Riemann", que da origen a uno de los 23 problemas que nos dejó David Hilbert (1862-1943) a las generaciones futuras en su ponencia de 1900. Este problema se refiere a la demostración de la llamada "Hipótesis de Riemann", según la cual, los ceros complejos no triviales de la función Zeta tienen todos parte real igual a ½, es decir, están sobre una línea recta.

Bajo esta Hipótesis, fue como Jacques Hadamard (1865-1963) y Charles de la Vallee Poussin (1866-1962) pudieron probar, en 1896 y de forma independiente, el enunciado desde entonces conocido como "Teorema de Los Números Primos", según el cual, el total, Π(x), de números primos menores que un entero dado, x, verifica, muy aproximadamente una relación en la que interviene el logaritmo neperiano del entero x:

$$p(x) \approx \frac{x}{L(x) - 1'08}$$

La Hipótesis de Riemann, sin embargo, no ha sido aún probada. Es decir, este problema, el octavo en la relación de los 23 problemas propuestos por Hilbert, sigue siendo un problema abierto en el campo de la matemática actual.

2. Definición:

La llamada *Función Zeta de Riemann* fue introducida por Euler mediante la definición

$$x(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Donde se trata de una serie convergente en la que *z* es un número complejo con parte real mayor que la unidad.

Algunos de los valores de esta función son muy conocidos. El mismo Euler obtuvo los siguientes:

$$x(2) = \frac{p^2}{6}, \ x(4) = \frac{p^4}{90}$$

3. Extensión de Riemann:

En 1859, Bernard Riemann tuvo la idea de definir esta función para todo complejo z, mediante continuación analítica. Esta idea es verdaderamente importante y juega un papel central en el estudio de la distribución de los números primos. Algunas técnicas permiten extender el dominio de definición de la función zeta, pues la continuación es independiente de las técnicas usadas, debido a su unicidad.

Veamos su definición a partir de la llamada *Función zeta alternada*:

$$x_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$$

definida para todo *z* de parte real positiva.

Es decir,

$$x_a(z) = 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} + \ldots = (1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots) - 2.(\frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \ldots) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - 2.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \frac{2}{2^z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = (1 - 2^{1-z}).\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = (1 - 2^{1-z}).x(z)$$

por tanto, es

$$x(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} x_a(z)$$

quedando asi, definida la función zeta para todo número complejo de parte real positiva, salvo para z=1, que correspondería a un polo.

Puede extenderse también el dominio de la función z a los complejos de parte real negativa, usando técnica parecida.

4. Expresión integral:

La función zeta puede expresarse de forma integral de manera bastante sencilla, pues si tenemos en cuenta que es

$$\int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{z+1}} = \int_n^{\infty} t^{-(z+1)}.dt = -\frac{t^{-z}}{z}\Bigg]_n^{\infty} = -\left(\frac{\infty^{-z}}{z} - \frac{n^{-z}}{z}\right) = -\left(0 - \frac{1}{z.n^z}\right) = \frac{1}{z.n^z}$$

se tendría que es:

$$\frac{1}{n^z} = z\int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{z+1}} = z.\sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^z}$$

y, por consiguiente:

$$x(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = z\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{z+1}} = z.\sum_{k\geq 1} \sum_{k\geq n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{z+1}} = z.\sum_{k\geq 1} k.\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{z+1}}$$

5. Otras expresiones:

Se pueden obtener otras expresiones equivalentes de la función Zeta de Riemann, de gran utilidad en desarrollos de aplicación de la función.

1. Usando la función Gamma ($\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}.e^{-t}.dt$), para x>1:

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}.dt$$

2. Mediante integrales múltiples:

$$\forall n \in N,\ n > 0,\ \int_0^1 \ldots - n - \ldots \int_0^1 \frac{\prod_{i=1}^{n} dx_i}{1 - \prod_{i=1}^{n} x_i}$$

3. Usando la Transformada de Mellin:

$$\zeta(z) = -z. \int_0^\infty frac\left(\frac{1}{t}\right).t^{n-1}.dt$$

(frac(t): parte fraccionaria de t)

6. Algunas propiedades:

Se verifican algunas propiedades interesantes:

1. La ecuación funcional:

$$\zeta(1-z) = \frac{2.\cos\left(\frac{\pi.z}{2}\right)\Gamma(z)\zeta(z)}{(2\pi)^{-z}}$$

2. El límite para z tendiendo a 1:

$$\lim_{z \to 1} \zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \gamma$$

donde es γ la llamada Constante de Euler: $\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - L(n) \right)$

3. La derivada de la función zeta:

$$\zeta'(z) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{L(n)}{n^z}$$

4. La factorización con números primos:

$$x(z)=\prod_{p\ primo}^{\infty}\frac{1}{1-p^{-z}}=\frac{1}{1-2^{-s}}x\frac{1}{1-3^{-s}}x\frac{1}{1-5^{-s}}x...$$

7. Documentación:

Ayoub, R: Euler and the Zeta Function. Amer. Math. Monthly 81, 1067-1086, 1974

Balazard, M., Saias, E., and York, M.: Notes sur la fonction ξ de Riemann. 2ª Adv. Math. 143, 284-287, 1999

Edwards, H. M.: Riemann's Zeta Function. New York, Academic Press, 1974

Ivic, A. A.: The Riemann Zeta-Function. New York. Wiley, 1985

Titchmarsh, E. C.: The Zeta-Function of Riemann, 2end Ed. Oxford, England: Oxford University Press, 1986

Lune, J. Van de, Riele, H.J.J., and Winter, D. T.: On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip, IV. Math. Comp. 46 (1986), 667-681